Städtisches Gymnasium Eschweiler
Mathematik Q2-II, M G1, M G3, 2017/18
Klausur 1, "Vorabiklausur

Cremer
Mathematik
28.2.2018

Name:
Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung:

$$f_k(x) = x^3 - k^2x$$

a) Weise nach, dass die Funktionen der Schar nur die Nullstellen $x = 0$, $x = -k$ und $x = -k$ haben.
b) Welche begründete Aussage lässt sich zur Symmentrie der Funktionsgraphen dieser Schar treffen?
c) Welchen Wert muss der Parameter k haben, damit die zugehörige Funktion mit der x-Achse eine Fläche von 8 FE einschließt?

Lösung:

a) Es ist:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - k^2x \\ &= x(x^2 - k^2) \\ &= x(x+k)(x-k) \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt die Behauptung.

b) Da x nur mit ungeraden Exponenten vorkommt, sind die Funktionen alle punktsymmentrisch zum Ursprung.

c) Wegen der Symmetrie ist die gesuchte Fläche gleich:

$$A = 2 \cdot \int\limits_0^k (x^3 - k^2x)\,dx$$

Für das Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^k (x^3 - k^2x)\,dx &= \frac{1}{4}x^4 - k^2\frac{1}{2}x^2|_0^k \\ &= \frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{2}k^4[-0] \\ &= -\frac{1}{4}k^4 \end{aligned}$$

Da für die gesuchte Fläche der Absolutbetrag dieses Wertes verwendet wird, lautet die zu lösende Gleichung:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot \frac{1}{4}k^4 \\ 16 &= k^4 \\ \pm 2 &= k \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist also $k = 2$ oder $k = -2$.

A2. Untersuche rechnerisch, ob der Punkt P(-1/4/1) in der Ebene

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegt.

Lösung:

$$\begin{aligned}-1 &= 1 + r\\ 4 &= 1 + s\\ 1 &= r + s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2 &= r\\ 3 &= s\\ 1 &= -2 + 3\end{aligned}$$

Offenbar liegt der Punkt in der Ebene.

A3. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(4/6/3), C(4/6/8) und D(1/2/8).
Weise rechnerisch nach, dass diese vier Punkte in der Reihenfolge A→B→C→D ein Quadrat bilden.
Tipp: Als Nachweis ist ausreichend, wenn gezeigt werden kann, dass alle vier Seiten die gleiche Länge haben und dass zwischen zwei benachbarten Seiten **ein** rechter Winkel besteht.
Lösung:
Die vier Verbindungsvektoren zwischen den Punkten sind:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \quad \vec{DA} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$$

Offenbar haben alle Verbindungsvektoren die Länge 5, sind also gleich lang. Weiterhin gilt etwa beim Punkt A:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{DA} &= \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\\ &= 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5\\ &= 0\end{aligned}$$

Offenbar stehen die Seiten senkrecht aufeinander.

A4. Die Abiturienten des Jahrgangs 2018 haben sich für den Abilball eine besondere Atraktion einfallen lassen. Auf dem Abiball gibt es ein Glücksrad, an dem Eltern, Lehrer und Schüler spielen können. Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ist das Ergebnis eines Spiels mit dem Glücksrad ein rotes Feld. Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ ein blaues und mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ ein grünes.
Der Spieleinsatz beträgt 1 Euro.
Bei einem roten Feld bekommt man keinen Gewinn ausbezahlt, bei einem blauen Feld bekommt man seinen Einsatz zurück (also einen Euro ausbezahlt) und bei einem grünen Feld bekommt man 5 Euro ausbezahlt.

a) Können die Abiturienten – wie geplant – davon ausgehen, dass das Glücksrad ihnen bei der Finanzierung ihrer Abiparty hilft?
b) Wie groß müsste die Auszahlung bei einem grünen Feld sein, damit das Spiel *fair* wird?
c) Wie groß müsste der Einsatz sein, damit das Spiel *fair* wird?

Lösung:

a) Der Erwartungswert ist:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{7}{6}$$

Offenbar verliert die Abiturientia bei jedem Spiel einen Sechstel Euro.

b) Wenn man den Auszahlungsbetrag x nennt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2} \cdot 0 + \right] \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot x &= 1\\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x &= 1\\ \frac{1}{6}x &= \frac{2}{3}\\ x &= 4\end{aligned}$$

Der Auszahlungsbetrag sollte 4 Euro betragen.

c) Da der Erwartungswert $\frac{7}{6}$ ist, sollte der Einsatz ca. 1.16 Euro betragen, damit das Spiel fair wird.

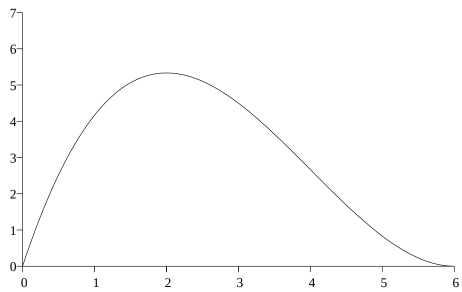
Name:

Teil 2 (mit Hilfsmittel = GTR, Formelsammlung)

A5. Um den Flughafen der Landeshauptstadt Düsseldorf vor der nächsten Hochwasserwelle des Rheins zu schützen, soll im Stadtteil Stockum ein neuer Deich gebaut werden, für den mehrere Alternativen zur Verfügung stehen.
Die verschiedenen Varianten des Deiches lassen sich durch die Funktionen:

$$f_6(x) = \frac{1}{3k}x(x-3k)^2$$

beschreiben, wobei der Parameter k nur Werte über 1 annehmen kann. Für $k = 2$ ergibt sich etwa das folgende Bild:



Hierbei entspricht die x-Achse links vom Ursprung des Koordinatensystems dem Land hinter dem Deich und die x-Achse rechts vom Ursprung dem normalen Wasserstand des Rheins. Der Wert $x = 0$ bestimmt in horizontaler Richtung den Anfang des Deiches. Alle Längen sind dabei in Metern angegeben.

a) Bestimme allgemein die Breite des Deiches in der Ebene.
Lösung:
Gesucht ist nach den Nullstellen der Funktion. Diese berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3k}x(x-3k)^2 \\ x = 0 &\vee x - 3k = 0 \\ x = 0 &\vee x = 3k \end{aligned}$$

Die Breite des Deichs in der Ebene ist also immer das Dreifache von k (da 0 als Nullstelle nicht von k abhängt).

b) Bestimme die horizontale Entfernung vom Anfang des Deiches bis zur Deichkrone (=höchster Punkt des Deiches) und deren Höhe allgemein.
Lösung:
Gesucht ist das Maximum der Funktionsschar. Dazu müssen die beiden ersten Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{1}{3k}x^3 - 2x^2 + 3kx \\ f_k'(x) &= \frac{1}{k}x^2 - 4x + 3k \\ f_k''(x) &= \frac{2}{k}x - 4 \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ist $f_k'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{k}x^2 - 4x + 3k \\ &= x^2 - 4kx + 3k^2 \\ x_{1/2} &= 2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 3k^2} \\ &= 2k \pm \sqrt{4k^2 - 3k^2} \\ &= 2k \pm k \end{aligned}$$

Die möglichen Extremalstellen liegen also bei $x = k$ und $x = 3k$.
Bei $x = 3k$ liegt eine Nullstelle der Funktionenschar; dort kan sich also nicht das Maximum befinden.
Die hinreichende Bedingung für $x = k$ ergibt weiterhin:

$$f_k''(k) = \frac{2}{k}k - 4 = -2 < 0$$

Bei $x = k$ liegt also das Maximum.
Die Deichkrone ist als k Meter vom Anfang entfernt.
Für die Höhe gilt:

$$f_k(k) = \frac{1}{3k}k(k - 3k)^2 = \frac{4}{3}k^2$$

Somit ist der Deich $\frac{4}{3}k^2$ Meter hoch.

c) Der Deich wird insgesamt 100m lang, soll 12m hoch ($k = 3$) und komplett aus Sand gebaut werden. Ein Kubikmeter des Sandes kostet 17 € . Bei der Kalkulation der Kosten geht der Kämmerer der Stadt von Materialkosten für den Sand von 80 000€ aus. Untersuche, ob diese Annahme realistisch ist?
Lösung:
Für die Lösung muss das Volumen des Deiches berechnet werden. Die Querschnittsfläche ergibt sich zu:

$$\int_0^9 \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 9x\,dx = 60,75$$

Somit hat der Deich ein Volumen von $60,75 \cdot 100 = 6075$ Kubikmetern Sand.
Die Kosten hierfür betragen: $6075 \cdot 17 = 103275$ € .
Der Kämmerer sollte also noch einmal eine Schippe drauf legen.

d) Wegen der desolaten[1] Haushaltslage der Stadt Düsseldorf muss auch bei den Kosten für den Deich gespart werden. Welchen Wert muss k haben, damit die Kosten für den Sand auf 70 000 € vermindert werden können?
Lösung:
Da der Deich in jedem Fall 100m lang sein muss, dürfen die Kosten für jeden Meter nur 700€ und damit der Kubikmeter nur $\frac{700}{17}$€ betragen. Daraus ergibt sich der Ansatz:

$$\int_0^{3k} f(x)\,dx = \frac{700}{17}$$

Dazu muss die Stammfunktion berechnet werden:

$$\int \frac{1}{3k}x^3 - 2x^2 + 3kx\,dx = \frac{1}{12k}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}kx^2$$

[1] trostlos, schlecht, miserabel

Da die untere Integrationsgrenze in jedem Fall 0 ist, gilt daher:

$$\frac{700}{17} = F(3k)$$
$$\frac{700}{17} = \frac{1}{12k}(3k)^4 - \frac{2}{3}(3k)^3 + \frac{3}{2}k(3k)^2$$
$$\frac{700}{17} = \frac{27}{4}k^3 - 18k^3 + \frac{27}{2}k^3$$
$$\frac{700}{17} = \frac{9}{4}k^3$$
$$18,3 = k^3$$
$$2,64 = k$$

Der Wert für k darf also höchstens 2.64 betragen.

A6. Die zu erwartende Aufmerksamkeit eines Schülers im Grundkurs der Mathematik während einer Unterrichtsstunde kann durch die Funktionen:

$$f_a(x) = x \cdot e^{-ax+a} = e^a \cdot x \cdot e^{-ax}$$

beschrieben werden. a ist dabei der '*Attraktivitäts*koeffizient', der bei jeder Lehrkraft anders ist. Während er bei Herrn Cremer nur den Wert $a = 1$ hat, hat er bei der Kollegin Schmitz den Wert: $a = 2$[2].
Eine Einheit auf der x-Achse entsprechen dabei einer halben Stunde, so daß mit $x = 3$ das Ende einer Doppelstunde erreicht ist.
Der Funktionswert gibt dabei die Aufmerksamkeit der Schüler an. Ein Wert von unter 0,5 gilt dabei als '*unaufmerksam*'.

a) In einem Kurs messen Bildungsforscher im Unterricht bei Herrn Cremer die folgenden Aufmerksamkeitswerte:

x	1	2	3
$f_1(x)$	1.0	0.7	0.4

Vergleich die gemessenen Werte mit den rechnerischen und gib jeweils den prozentualen Unterschied an (100%=rechnerischer Wert).

Lösung:

a) Nach einer halben Stunde ist der gemessene Wert gleich dem rechnerischen Wert, es gibt also keinen Unterschied.
Nach einer Stunde beträgt der rechnerische Wert etwas mehr und es ergibt sich:

$$\frac{70}{0.735\ldots} = 95.1$$

Die Abweichung beträgt also ca. 5%.
Am Ende der Stunde ergibt sich ebenfalls eine Abweichung und der Unterschied beträgt nun:

$$\frac{40}{0.406\ldots} = 98.5$$

Die prozentuale Abweichung beträgt hier also nur ca. 1.5%

b) Bestimme jeweils wieviele Minuten nach Unterrichtsbeginn bei Herrn Cremer, bzw. Frau Schmitz das Maximum an Aufmerksamkeit erreicht ist.

Lösung:

Für die beiden Funktionen

$$f_1(x) = x \cdot e^{1-x}$$

und

$$f_2(x) = x \cdot e^{2-2x}$$

[2] Jede Ähnlichkeit mit lebenden Personen ...

muss jeweils das Maximum bestimmt werden. Der GTR ergibt die Werte:

$$HP_1(1/1), \quad HP_2(0.5/1.37)$$

Bei Herrn Cremer ist die Aufmerksamkeit nach einer halben Stunde am größten, während sie bei Frau Schmitz schon nach einer Viertelstunde ihr Maximum erreicht.

c) Untersuche nach wievielen Minuten die Aufmerksamkeit im Unterricht bei Frau Schmitz am stärksten nachlässt. Verwende dabei:

$$f_2'''(x) = (12 - 8x)e^{2-2x}$$

Lösung:

c) Gesucht ist nach der Wendestelle. Dazu müssen die ersten beiden Ableitungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 1 \cdot e^{2-2x} + x \cdot e^{2-2x} \cdot (-2) \\ &= (1-2x) \cdot e^{2-2x} \\ f_2''(x) &= (-2) \cdot e^{2-2x} + (1-2x) \cdot e^{2-2x} \cdot (-2) \\ &= (4x-4) \cdot e^{2-2x} \end{aligned}$$

Von der zweiten Ableitung muss nun die Nullstele bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= (4x-4) \cdot e^{2-2x} \\ 0 &= 4x - 4 \\ 4 &= 4x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Da weiterhin gilt: $f_2'''(1) = 4 \neq 0$ fällt die Aufmerksamkeit nach einer halben Stunde am stärksten ab.

d) Für die beiden Lehrkräfte ergeben sich folgende Rechnungen:

$$\int_0^3 f_1(x)\,dx \approx 2.18 \qquad \int_0^3 f_2(x)\,dx \approx 1.81$$

Welche Aussage lässt sich aus diesen beiden Angaben im Sachzusammenhang treffen? Beachte dazu auch das Ergebnis der Aufgabe b)

Lösung:

Die "Summe" der Aufmerksamkeit ist bei Herrn Cremer höher als bei Frau Schmitz. Dies gilt sogar, obwohl das Maximum bei Frau Schmitz höher liegt, als bei Herrn Cremer.

e) Um 7:45 beginnt der Unterricht bei Frau Schmitz. Bestimme in welchen Zeiträumen die Schüler/innen bei Frau Schmitz unaufmerksam sind (Uhrzeitangaben!).

Lösung:

Dazu muss die Funktion:

$$f(x) = x \cdot e^{2-2x} - 0.5$$

auf Nullstellen hin untersucht werden. Der GTR findet die Lösungen: $x = 0.079$ und $x = 1.573$ Daraus berechnen sich folgende Uhrzeiten:

Nach ca. 2,5 Minuten, also um 7:47 Uhr sind die Schüler/innen bei Frau Schmitz aufmerksam.

Nach ca. 47 Minuten, also ab 8:17 sind die Schüler/innen nicht mehr aufmerksam.

A7. Die Punkte A(7/0/0), B(7/7/0) und D(7/0/7) legen eine Ebene E fest.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E.

Lösung:

a) Wählt man den Ortsvektor von A als Ortsvektor der Ebene und die Differenzvektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ als Richtungsvektoren, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} E : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + s \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Zeige, dass das Dreieck ABD gleichschenklig aber nicht gleichseitig ist.
Lösung:

b) Die oben berechneten Randvektoren haben die Länge:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = 7$$

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{BD} &= \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{98} \approx 9.9 \end{aligned}$$

Offenbar ist das Dreieck gleichschenklig (AB und AD sind gleich lang. Es ist nicht gleichseitig, weil BD eine andere Länge hat.

c) Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes C so, dass ABCD ein Quadrat ergibt.
Lösung:

c) Den Ortsvektor des gesuchten Punktes erhält man, indem man zum Ortsvektor von B den Vektor $\vec{AD}$ addiert:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offenbar ist der Punkt C(7/7/7).

d) Durch die Punkte E(0/0/7) und F(14/7/0) verläuft eine Gerade. Bestimme die Gleichung dieser Geraden.
Lösung:

d) Es handelt sich offenbar um die Gerade:

$$
\begin{aligned}
g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden aus d) und der Ebene aus a) .
Sollten Aufgabe a) und d) nicht gelöst worden sein, dann verwende:

$$
\begin{aligned}
g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
E : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung:

e) Durch Gleichsetzen von Ebene und Geraden erhält man:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen (GTR): $r = s = t = 3,5$.
Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, dann erhält man den Schnittpunkt: S(7/3,5/3,5).

f) Offenbar schneidet die Gerade aus d) die 3. Koordinatenachse. Berechne den Schnittwinkel zwischen der Geraden und dieser Koordinatenachse.

Lösung:

f) Ein Richtungsvektor der Koordinatenachse ist der Vektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der offenbar die Länge 1 hat.

Die Länge des Richtungsvektors ist:

$$|\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Daraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
-1 &= 1 \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\alpha \\
\frac{-1}{\sqrt{6}} &= \cos\alpha \\
114.1^\circ &\approx \alpha
\end{aligned}
$$

Der Winkel zwischen Gerade und Koordinatenachse beträgt demnach: $180^\circ - 114.1^\circ = 65,9^\circ$.

Name:

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung:

$$f_k(x) = x^3 - 2kx^2 + k^2x$$

a) Weise nach, dass die Funktionen dieser Schar nur die Nullstellen $x = 0$ und $x = k$ haben.
b) Welche begründete Aussage lässt sich zur Symmentrie der Funktionsgraphen dieser Schar treffen?
c) Welchen Wert muss der Parameter k annehmen, damit die von dem Graphen der zugehörigen Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Wert $\frac{4}{3}$ FE annimmt?

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2kx^2 + k^2x \\ &= x(x^2 - 2kx + k^2) \\ &= x(x-k)^2 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt die Behauptung.

b) Da von der Variablen x sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen ist eine Aussage zur Symmentrie nicht möglich.

c) Die gesucht Fläche lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^k (x^3 - 2kx^2 + k^2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 2k\frac{1}{3}x^3 + k^2\frac{1}{2}x^2|_0^k \\ &= \frac{1}{4}k^4 - \frac{2}{3}k^4 + \frac{1}{2}k^4 \\ &= \frac{1}{12}k^4 \end{aligned}$$

Somit muss die folgende Gleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= \frac{1}{12}k^4 \\ 16 &= k^4 \\ \pm 2 &= k \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist daher $k = 2$ oder $k = -2$

A2. Untersuche rechnerisch, ob der Punkt P(1/4/1) in der Ebene

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegt.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 + r \\
4 &= 1 + s \\
1 &= r + s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= r \\
3 &= s \\
1 &= 0 + 3
\end{aligned}
$$

Offenbar liegt der Punkt nicht in der Ebene.

A3. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(2/4/5), C(2/9/5) und D(1/7/3).
Weise rechnerisch nach, dass diese vier Punkte in der Reihenfolge A→B→C→D kein Quadrat bilden.
Tipp: Überprüfe die Länge der Seitenvektoren und mindestens einen Winkel.
Lösung:
Die Verbindungsvektoren zwischen den Seiten sind:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alle Seitenvektoren haben die Länge 5. Das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{BC}$ berechnet sich zu:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 + 10 + 0 \\
&= 10 \neq 0
\end{aligned}
$$

Offenbar stehen die Seiten nicht senkrecht aufeinander, [es handelt sich also um eine Raute].

A4. Die Abiturienten des Jahrgangs 2018 haben sich für den Abilball eine besondere Atraktion einfallen lassen. Auf dem Abiball gibt es ein Glücksrad, an dem Eltern, Lehrer und Schüler spielen können. Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ist das Ergebnis eines Spiels mit dem Glücksrad ein rotes Feld. Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ ein blaues und mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ ein grünes.
Der Spieleinsatz beträgt 1 Euro.
Bei einem roten Feld bekommt man keinen Gewinn ausbezahlt, bei einem blauen Feld bekommt man seinen Einsatz zurück (also einen Euro ausbezahlt) und bei einem grünen Feld bekommt man 3 Euro ausbezahlt.

a) Können die Abiturienten – wie geplant – davon ausgehen, dass das Glücksrad ihnen bei der Finanzierung ihrer Abiparty hilft?
b) Wie groß müsste die Auszahlung bei einem grünen Feld sein, damit das Spiel *fair* wird?
c) Wie groß müsste der Einsatz sein, damit das Spiel *fair* wird?

Lösung:

a) Der Erwartungswert ist:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{5}{6}$$

Offenbar gewinnt die Abiturientia bei jedem Spiel einen Sechstel Euro.

b) Wenn man den Auszahlungsbetrag x nennt, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2} \cdot 0 + \right] \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot x &= 1 \\
\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x &= 1 \\
\frac{1}{6}x &= \frac{2}{3} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Der Auszahlungsbetrag sollte 4 Euro betragen.

c) Da der Erwartungswert $\frac{5}{6}$ ist, sollte der Einsatz ca. 0.83 Euro betragen, damit das Spiel fair wird.

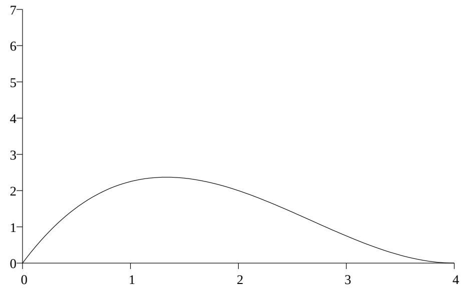
Name:

Teil 2 (mit Hilfsmittel = GTR, Formelsammlung)

A5. Um den Flughafen der Landeshauptstadt Düsseldorf vor der nächsten Hochwasserwelle des Rheins zu schützen, soll im Stadtteil Stockum ein neuer Deich gebaut werden, für den mehrere Alternativen zur Verfügung stehen.
Die verschiedenen Varianten des Deiches lassen sich durch die Funktionen:

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x(x-2k)^2$$

beschreiben, wobei der Parameter k nur Werte über 1 annehmen kann. Beispielsweise ergibt sich für $k = 2$ etwa das folgende Bild:



Hierbei entspricht die x-Achse links vom Ursprung des Koordinatensystems dem Land hinter dem Deich und die x-Achse rechts vom Ursprung dem normalen Wasserstand des Rheins. Der Wert $x = 0$ bestimmt in horizontaler Richtung den Anfang des Deiches. Alle Längen sind dabei in Metern angegeben.

a) Bestimme allgemein (!) die Breite des Deiches in der Ebene.

b) Bestimme die horizontale Entfernung vom Anfang des Deiches bis zur Deichkrone (=höchster Punkt des Deiches) und deren Höhe allgemein (!).

c) Der Deich wird insgesamt 100m lang, soll $5\frac{1}{3}$m hoch ($k = 3$) und komplett aus Sand gebaut werden. Ein Kubikmeter des Sandes kostet 17 € . Bei der Kalkulation der Kosten geht der Kämmerer der Stadt von Materialkosten für den Sand von 20 000€ aus. Untersuche, ob diese Annahme realistisch ist?

d) Wegen der desolaten[3] Haushaltslage der Stadt Düsseldorf muss auch bei den Kosten für den Deich gespart werden. Welchen Wert muss k haben, damit die Kosten für den Sand auf 15 000 € vermindert werden können?

[3] trostlos, schlecht, miserabel

A6. Die zu erwartende Aufmerksamkeit eines Schülers im Grundkurs der Mathematik während einer Unterrichtsstunde kann durch die Funktionen:

$$f_a(x) = x \cdot e^{-ax+a} = e^a \cdot x \cdot e^{-ax}$$

beschrieben werden. a ist dabei der '*Attraktivitäts*koeffizient', der bei jeder Lehrkraft anders ist. Während er bei Herrn Cremer nur den Wert $a = 1$ hat, hat er bei der Kollegin Schmitz[4] den Wert $a = 2$.
Eine Einheit auf der x-Achse entsprechen dabei einer halben Stunde, so daß mit $x = 3$ das Ende einer Doppelstunde erreicht ist.
Der Funktionswert gibt dabei die Aufmerksamkeit der Schüler an. Ein Wert von unter 0,5 gilt dabei als '*unaufmerksam*'.

a) In einem Kurs messen Bildungsforscher im Unterricht bei Herrn Cremer die folgenden Aufmerksamkeitswerte:

x	1	2	3
$f_1(x)$	1.0	0.7	0.4

Vergleich die gemessenen Werte mit den rechnerischen und gib jeweils den prozentualen Unterschied an (100%=rechnerischer Wert).

b) Bestimme jeweils wieviele Minuten nach Unterrichtsbeginn bei Herrn Cremer, bzw. Frau Schmitz das Maximum an Aufmerksamkeit erreicht ist.

c) Untersuche nach wievielen Minuten die Aufmerksamkeit im Unterricht bei Frau Schmitz am stärksten nachlässt. Verwende dabei:

$$f_2'''(x) = (12 - 8x)e^{2-2x}$$

d) Für die beiden Lehrkräfte ergeben sich folgende Rechnungen:

$$\int_0^3 f_1(x)\,dx \approx 2.18 \qquad \int_0^3 f_2(x)\,dx \approx 1.81$$

Welche Aussage lässt sich aus diesen beiden Angaben im Sachzusammenhang treffen? Beachte dazu auch das Ergebnis der Aufgabe b)

e) Um 7:45 beginnt der Unterricht bei Frau Schmitz. Bestimme in welchen Zeiträumen die Schüler/innen bei Frau Schmitz unaufmerksam sind (Uhrzeitangaben!).

A7. Die Punkte A(7/0/0), B(7/7/0) und D(7/0/7) legen eine Ebene E fest.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E.

b) Zeige, dass das Dreieck ABD gleichschenklig aber nicht gleichseitig ist.

c) Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes C so, dass ABCD ein Quadrat ergibt.

d) Durch die Punkte E(0/0/7) und F(14/7/0) verläuft eine Gerade. Bestimme die Gleichung dieser Geraden.

e) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden aus d) und der Ebene aus a) .
Sollten Aufgabe a) und d) nicht gelöst worden sein, dann verwende:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) Offenbar schneidet die Gerade aus d) die 3. Koordinatenachse. Berechne den Schnittwinkel zwischen der Geraden und dieser Koordinatenachse.

[4] Jede Ähnlichkeit mit lebenden Personen . . .