Städtisches Gymnasium Eschweiler — Cremer
Mathematik Q2/I, M G1 — 2018/19
1. Klausur Lineare Algebra, Ganzrat. Funktion — 10.10.2018

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Berechne:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

A2. Untersuche rechnerisch, ob die folgenden Gruppen von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

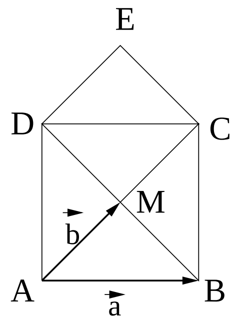
Also sind die Vektoren **linear unabhängig**.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also sind die Vektoren **linear abhängig**.

A3. Die folgende Abbildung zeigt das "Haus vom Nikolaus".



Die Verbindungen AM und DE sind parallel zueinander.

a) Beschreibe mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wie man vom Punkt A zum Punkt D gelangt.

b) Beschreibe, wie man vom Punkt E zum Punkt B gelangt.

c) Begründe, wieso die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausreichen, um die Figur vollständig zu beschreiben.

d) Gib für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sinnvolle Elemente an (Schreibe die Vektoren jeweils als Spaltenvektoren).

Lösung:

a) $2\vec{b} - \vec{a}$

b) $-3\vec{b} + 2\vec{a}$

c) Die Figur ist 2-dimensional (und daher auch die Vektoren), es kann aber nur zwei linear unabhängige Vektoren dieser Dimension geben.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A4. Eine Gerade ist in vektorieller Schreibweise gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche rechnerisch, ob die Punkte $A(5/10/11)$ und $B(-1/-1/-1)$ auf der Geraden liegen.

Lösung:

Für die erste Zeile beim Punkt A ergibt sich: $5 = 1 + 0.5r \Leftrightarrow r = 8$. Für die zweite Zeile ergibt sich damit: $10 = 10$ und für die dritte: $11 = 11$.

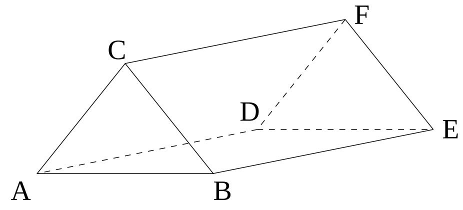
Der Punkt A liegt auf der Geraden.

Für die erste Zeile beim Punkt B ergibt sich: $-1 = 1 + 0.5r \Leftrightarrow r = -4$. In der zweiten Zeile ergibt sich damit: $-1 = -2$.

Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden.

Teil 2 (Hilfsmittel: GTR, Tafelwerk)

A5. Ein Zelt hat die Form eines liegenden dreiseitigen Prismas, das durch die Punkte A, B, C, D, E und F bestimmt ist.



Zeichnung nicht maßstabsgerecht

Für einige Punkte sind die Koordinaten bekannt, sie lauten:

$$A(0/0/0), B(2/0/0), C(1/0/2) \text{ und } E(2/3/0)$$

Eine Einheit in den Koordinaten steht dabei für einen Meter.

a) Gib begründet die Koordinaten der Punkte D und F an.

b) Die Seitenflächen ($BEFC$ und $ADFC$), sowie die beiden 'Kopfseiten' (ABC und DEF) des Zelts bestehen aus Stoff. Zur Imprägnierung des Stoffes stehen zwei Sprühflaschen zur Auswahl. Die erste reicht für $20m^2$, die zweite für $30m^2$. Weise rechnerisch nach, dass die erste Flasche ausreichend ist.

Lösung:

a) Die dritte Koordinate benennt die Höhe, daher muss D die Koordinaten $D(0/3/0)$ haben.

F hat die Höhe 1 und die 'Tiefe' 3, also: $F(1/3/2)$.

b) Berechnung der Dreiecksflächen:

Die Höhe dieser Dreiecke ist 1, ihre Grundseite 2. Somit ist die Fläche eines Dreiecks: $A_D = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$FE.

Da dieses Dreieck zweimal vorkommt ist die Gesamtfläche 2FE.

Berechnung der Rechtecksflächen.

Hier muss zunächst die Höhe des Rechtecks berechnet werden. Sie ist gleich der Länge des Vektors $\vec{AC}$:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.24 \text{ FE}$$

Somit ist eine Rechteckseite: $3 \cdot 2.24 = 6.72$FE groß. Auch hiervon gibt es zwei Flächen, so dass die Gesamtfläche der Rechtecke: $2 \cdot 6.72 = 13.44$FE groß ist.

Die gesamte Oberfläche des Zeltes ist demnach: $2 + 13.44 = 15.44$FE. Die kleine Flasche reicht also.

A6. In einem BMX-Parcours wird eine Sprungschanze eingebaut, deren seitliches Profil durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{3}{4}x, \quad -8 \leq x \leq 0$$

gegeben ist. Dabei werden sowohl x als auch $f(x)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Meter aufgefasst. Der Funktionsgraph von f ist in der folgenden Abbildung 1 dargestellt.

Die Sprungschanze wird ausgehend vom Startpunkt S von links nach rechts durchfahren und so eingebaut, dass der Absprungspunkt $A(0/0)$ auf dem Niveau des Erdbodens liegt, das in der Seitenansicht durch die x-Achse festgelegt ist.

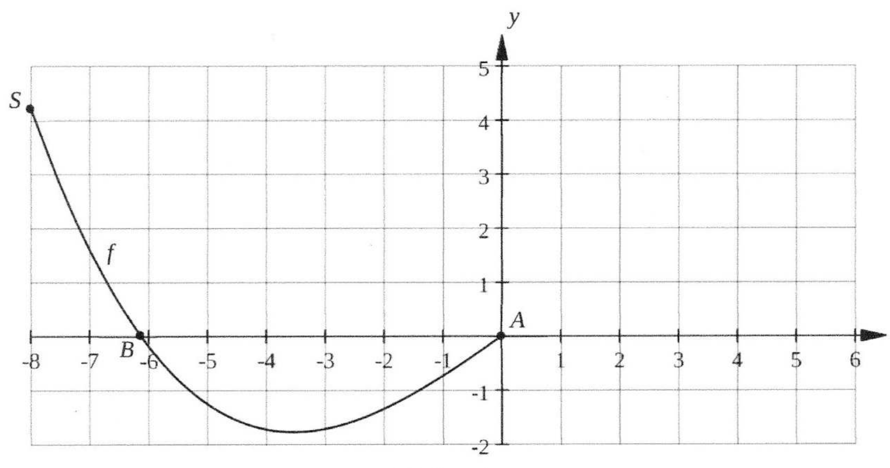


Abbildung 1

a)

(1) Berechne die Höhe y_s des Startpunkts $S(-8/y_s)$ über dem Erdboden.

(2) Der Funktionsgraph von f schneidet die x-Achse im Punkt $A(0/0)$ und einem weiteren Punkt B. Berechne die Koordinaten dieses Punkts B.
Zur Kontrolle: $B(-\frac{5}{2}\sqrt{6}/0)$

(3) Die durchschnittliche Steigung der Sprungschanze zwischen Startpunkt S und Absprungpunkt A wird mit $-0,53$ angegeben.

Prüfe diese Angabe und zeige, dass der angegebene Durchschnittswert auch als Steigung in einem Punkt C des Sprungschanzenprofils vorkommt.

Erkläre, warum der angegebene Durchschnittswert der Steigung nur wenig über den Verlauf der Sprungschanze aussagt.

(16 Punkte)

b)

(1) Bestimme rechnerisch die Koordinaten des tiefsten Punktes T des Sprungschanzenprofils.

(2) Berechne den Winkel gegen die Horizonatale, unter dem die BMX-Fahrer im Punkt A die Schanze tangential verlässt.

(12 Punkte)

c) In dem Bereich, in dem das Profil der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft, muss Erde ausgehoben werden.

(1) Gib eine Gleichung einer Stammfunktion F der Funktion f an.

(2) Berechne, wie groß das Erdvolumen ist, das bis zur Profillinie der Sprungschanze ausgehoben werden muss, wenn die Sprungschanze 2m breit ist.

(8 Punkte)

d) Um den BMX-Fahrern nach dem Sprung eine weichere Landung zu ermöglichen, soll rechts vom Punkt A im Bereich $0 \leq x \leq 5$ ein Aufsprunghügel angelegt werden, dessen seitliches Profil durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades h zu modellieren ist. Dieses soll im Punt A ohne Knick an das Profil der Sprungschanze anschließen und im Punkt $D(5/0)$ ebenfalls ohne Knick in die waagerechte Erdoberfläche übergehen.

(1) Gib die Bedingungn an, welche die Funktion h erfüllen muss, und leite daraus eine Gleichung dieser Funktion h her (Siehe Abbildung 2).
Zur Kontrolle: $h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x$

(2) Bestimme die Stelle, an der der durch den Graphen der Funktion h modellierte Aufsprunghügel die betragsmäßig größte Steigung hat.

(14 Punkte)

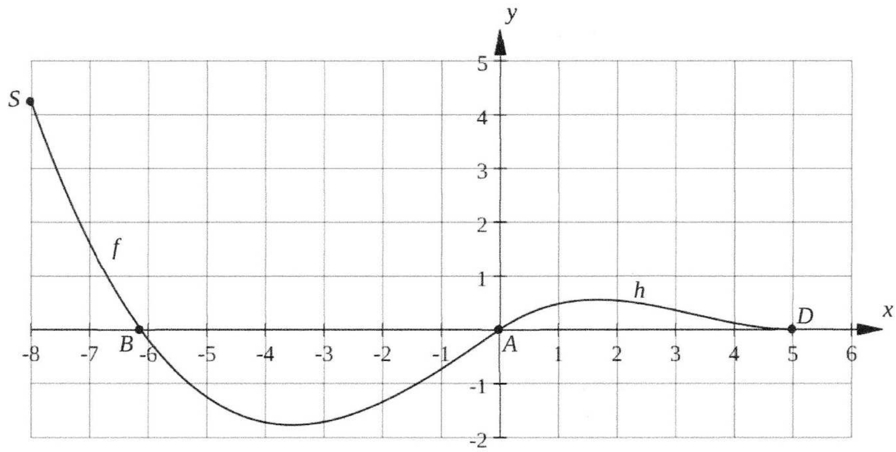


Abbildung 2