Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie *immer zutreffen* oder *nie zutreffen*.

a) Zwei Geraden mit kollinearen (linear abhängigen) Richtungsvektoren schneiden sich.

b) Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, können sich nur schneiden, parallel oder identisch sein.

c) Wenn die (insgesamt) drei Richtungsvektoren einer Geraden und einer Ebene linear unabhängig (nicht komplanar) sind, dann schneidet die Gerade die Ebene.

d) Das Gleichungssystem, das entsteht, wenn man zwei Ebenen gleich setzt, hat genau eine Lösung.

Lösung:

a) Trifft nie zu.

b) Trifft immer zu.

c) Trifft immer zu.

d) Trifft nie zu.

(4)

A2. Bestimme die gegenseitige Lage von:

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Die erste Zeile des LGS $g_1 = g_2$ lautet: $1 + r = 2 \Leftrightarrow r = 1$. Die zweite Zeile lautet: $2 = -3 + s \Leftrightarrow s = 5$. Setzt man diese Werte in die dritte Zeile ein, ergibt sich: $3 + 2 = 0 + 5$. Somit schneiden sich die Geraden in einem Punkt.
Setzt man $r = 1$ in die erste Geradengleichung ein, ergibt sich: $SP(2/2/5)$

b) Setzt man Gerade und Ebene gleich, ergibt sich sofort die Lösung: $r = 1, s = 0, t = 3$. Die Gerade durchstößt die Ebene.
Setzt man $r = 1$ in die Geradengleichung ein, ergbit sich der Schnittpunkt $SP(2/2/3)$

c) Die sich ergebenden drei Gleichungen sind: $r = s, r = t, 0 = 0$. Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen.
Die Gerade liegt in der Ebene.

(4+3+3)

A3. Gegeben sind die Punkte $A(-2/1/-2)$, $B(1/2/-1)$ und $C(1/1/4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d/1/4)$

a) Begründe mithilfe der Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$, dass A, B und C nicht auf einer Geraden liegen und gib eine Gleichung der Ebene an, in der das Dreieck ABC liegt.

b) Ermittle den Wert von d, so dass das Dreieck ABD im Punkt B rechtwinklig ist.

Lösung:

a) Es ist

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Offenbar sind die Vektoren keine Vielfachen voneinander und daher liegen A, B und C nicht auf einer Geraden.

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

(4)

b)

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d-1 \\ 1-2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(d-1) + (-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{3}$$

(2)

Teil 2 (Hilfsmittel: GTR, Tafelwerk)

A4. Gegeben sind die beiden Geraden:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Weise nach, dass sich die beiden Geraden schneiden.
Lösung:
Setzt man die beiden Geraden gleich, ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_2 \\ \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $r = 3$ und $s = -2$. Da es genau eine Lösung hat, schneiden sich die Geraden.

(3)

b) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden.
Lösung:
Um den Schnittpunkt zu bestimmen muss nur eine der beiden Lösungen aus a) in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt werden. Setzt man r in g_1 ein, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit die Koordinaten des Schnittpunkts.

(2)

c) Bestimme den Schnittwinkel der beiden Geraden.
Lösung:
Hierzu muss der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren bestimmt werden. Dazu ist:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14} \qquad \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

Damit ergibt sich der Ansatz:

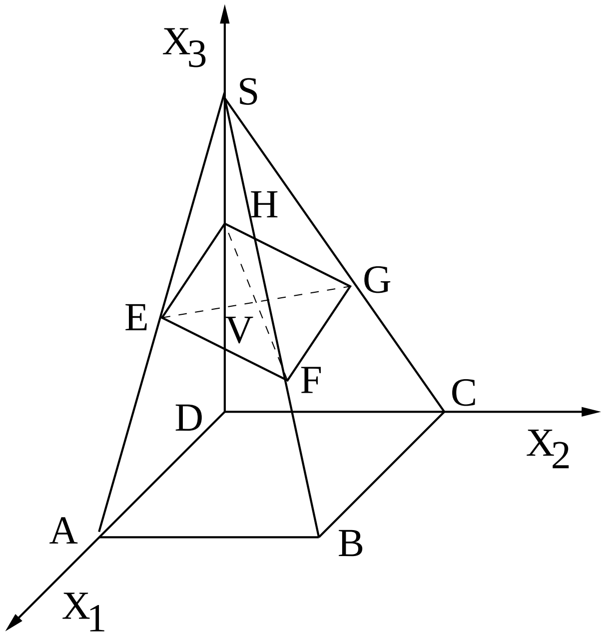
$$\begin{aligned} 7 &= \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\alpha \\ \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} &= \cos\alpha \\ \arccos \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} &= \alpha \approx 40.2 \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den beiden Geraden beträgt also $40.2°$.

(5)

A5. Ein Designer erhält von einer Süßwarenfirma den Auftrag, eine neue Schachtel für Schokolinsen zu entwerfen. Der Entwurf sieht vor, dass die Schachtel Teil einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist. Durch den Schnitt mit einer geeigneten Ebene entsteht als Schnittfläche die viereckige Deckfläche der Schachtel.

Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(8/0/0)$, $B(8/8/0)$, $C(0/8/0)$ und $D(0/0/0)$. ihre Spitze ist der Punkt $S(0/0/8)$.
Die Schnittebene e_{EGH} wird festgelegt durch die Punkte $E(4/0/4)$, $G(0/4/4)$ und $H(0/0/5)$ (alle Angaben in cm).
Die Schachtel ist dann der Körper mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H.



a)

(1) Gib die Breite und die Höhe der Schachtel an.
Lösung:
Die Breite ist 8cm und die Höhe 5cm.

(2)

(2) Gib eine Parametergleichung der Ebene e_{EGH} an.
[Mögliche Lösung: $e_{EGH} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$]
Lösung:
Wählt man $\vec{H}$ als Ortsvektor und die Vektoren $\vec{HE}$ und $\vec{HG}$ als Richtungsvektoren, dann ergibt sich:

$$e_{EGH} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3)

(3) Das Viereck $EFGH$ bildet die Deckfläche der Schachtel. Gib die Koordinaten des Punktes F an.
Lösung:
F ist der Schnittpunkt der Ebene e_{EGH} mit der Geraden durch B und S. Diese ist:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen von Ebene und Gerade erhält man:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\-8\\8\end{pmatrix}$$
$$r\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\-5\end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $r = 1.5$, $s = 1.5$, $t = 0.25$.
Setzt man t in g ein erhält man: F(6/6/2).

(6)

(4) Gib begründet an, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.
Lösung:
Der Vektor von H nach E ist: $\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$. Dieser liegt nicht parallel zur Grundfläche der Schachtel ($x_1 - x_2$-Ebene), daher kann auch die Deckfläche nicht parallel zur Grundfläche liegen.

(3)

b) Entlang der beiden Diagonalen der Deckfläche (Viereck $EFGH$) soll die Schachtel geöffnet werden können.

(1) Zeige, dass die Diagonalen orthogonal sind (senkrecht aufeinander stehen).
Lösung:
Es ist:

$$\vec{EG} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{HF} = \begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$$

und weiterhin ist:

$$\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix} = 0$$

Damit stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

(4)

(2) Berechne die Längen der Diagonalen und bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts V.
Lösung:
Es sind:

$$|\vec{EG}| = \sqrt{32} \approx 5.66 \quad \text{und} \quad |\vec{HF}| = 9$$

(4)

Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen muss die 'Höhenkoordinaten' 4 haben. Außerdem gil für ihn, dass $\vec{v} = \vec{DH} + r\vec{HF}$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 + 6r \\ v_2 &= 0 + 6r \\ v_3 = 4 &= 5 - 3r \end{aligned}$$

Aus der dritten Zeile ergibt sich $r = \frac{1}{3}$ und damit der Schnittpunkt $V(2/2/4)$.

(5)

(3) Berechne den Flächeninhalt der Deckfläche.
Lösung:

Die Fläche besteht aus den Dreiecken EGH und EFG. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\vec{EG}||\vec{VH}| + \frac{1}{2}|\vec{EG}||\vec{VF}| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot 3 + \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot 6 \\ &= 18\sqrt{2} \approx 25.5\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(4)

c) In einem zweiten Entwurf der Schachtel wird die Deckfläche und damit die Form der Schachtel folgendermaßen geändert: Die neue Deckfläche entsteht durch den Schnitt der bekannten Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene, die in einer Höhe von 4cm parallel zur Grundfläche ($x_1 - x_2-$Ebene) liegt.

(1) Weise nach, dass die Punkte $F'(4/4/4)$ und $H'(0/0/4)$ zusammen mit den bekannten Punkten E und G die Eckpunkte der neuen Deckfläche sind.
Lösung:
Die Gleichung:

$$r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $r = \frac{1}{2}$, was bedeutet, dass H' auf der Verbindung von D und S liegt. Außerdem ist die 'Höhenkoordinate' von H' 4 und damit ist H' Eckpunkt.
Analoges lässt sich für F' nachweisen, ausgehend von:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(5)

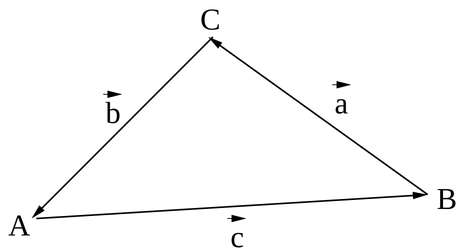
(2) Untersuche, welche Form die neue Deckfläche (Viereck EF'GH') hat.
Lösung:
Alle Seitenvektoren der Deckfläche haben die Länge 4. Da außerdem einer der Winkel benachbarter Seiten ein rechter ist, ist die Fläche ein Quadrat.

(5)

(3) Ermittle mit Hilfe der Anschauung, welche Bedingungen eine Ebene erfüllen muss, damit durch den Schnitt dieser Ebene mit der Pyramide $ABCDS$ eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht.
Lösung:
Die Ebene muss parallel zur x_1-x_2-Ebene liegen und ihre dritte Koordinate muss einen Wert zwischen 0 und 8 haben (nicht inklusive).

(5)

A6. Ein Dreieck ist gegeben durch die Eckpunkte $A(0/0/0)$, $B(1/4/2)$ und $C(1/3/3)$.
Bestimme alle Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.
Tipp: Lege das Dreieck am einfachsten in der Form:



an und überlege, wie der berechnete Winkel zwischen zwei Vektoren zu dem Innenwinkel des Dreiecks passt. Achte auf die Orientierung der Vektoren!
Lösung:
Zunächst sollten die Vektoren bestimmt werden. Es sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ihre Längen sind:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{19} \quad |\vec{c}| = \sqrt{21}$$

Der Winkel α liegt zwischen $\vec{c}$ und $-\vec{b}$, woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot -\vec{b} &= |\vec{c}||\vec{b}| \cos\alpha \\ 19 &= \sqrt{21} \cdot \sqrt{19} \cdot \cos\alpha \\ \frac{19}{\sqrt{21}\sqrt{19}} &= \cos\alpha \\ \cos^{-1} \frac{19}{\sqrt{21}\sqrt{19}} &= \alpha \approx 17.98° \end{aligned}$$

Der Winkel γ liegt zwischen $\vec{b}$ und $-\vec{a}$. Der Ansatz zur Bestimmung von γ zeigt allerdings, dass:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Somit ist der Winkel $\gamma = 90°$.
Der Winkel β ist dann einfach $\beta = 180 - 90 - 17.98 = 72.04°$.

(8)

Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt lässt sich der Flächeninhalt einfach berechnen:

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{19} \approx 3.08\text{FE}$$

(2)