

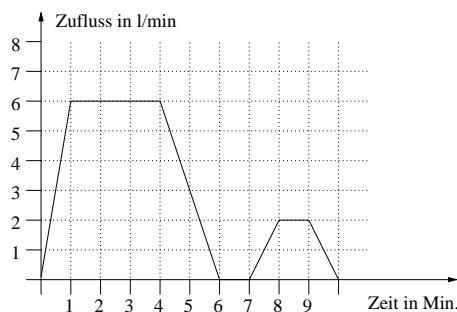
### Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1.

- a) Berechne die erste Ableitungsfunktion der Funktion

$$f(x) = 3x \cdot e^{2x-1}$$

- b) Zeichne ein geeignetes Koordinatensystem und trage dort einen Funktionsgraphen ein, für dessen zugehörige Funktion  $f(x)$  gilt:  
 $f(0) = 4$ ,  $f'(4) = 0$ ,  $f''(4) > 0$
- c) Der Graph:



beschreibt den Zufluss von Wasser in ein Planschbecken. Der Zufluss wird in Liter pro Minute und die Zeit in Minuten angegeben.  
 Bestimme wieviel Wasser sich nach drei Minuten im Planschbecken befindet? Beschreibe dein Vorgehen.

2+3+3

#### Lösung:

- a)

$$\begin{aligned} u(x) &= 3xu'(x) = 3 \\ v(x) &= e^{2x-1}v'(x) = 2e^{2x-1} \\ f'(x) &= 3e^{2x-1} + 6xe^{2x-1} = (3 + 6x)e^{2x-1} \end{aligned}$$

(2)

- b) Der Funktionsgraph muss durch den Punkt  $(0/4)$  laufen und bei  $x = 4$  ein Minimum haben. (3)
- c) Die gesuchte Wassermenge entspricht dem Integral von 0 bis drei. Dieses lässt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck zusammensetzen und deren Größe bestimmen:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1 \cdot 6}{2} + 2 \cdot 6 \\ &= 3 + 12 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Es befinden sich also 15 Liter Wasser im Becken.

(3)

A2.

- a) In einer Urne befinden sich 2 schwarze, 2 weiße und eine goldene Kugel. Beschreibe ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit:

$$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

berechnen lässt.

- b) Bei einer Lotterie hat man eine Gewinnchance von  $0,2 \left(\frac{1}{5}\right)$ . Darüber hinaus sind die folgenden Terme gegeben:

$$P_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^4, \quad P_2 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4, \quad P_3 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}, \quad P_4 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

Ordne den folgenden Ereignissen den richtigen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu.

$E_1$ : Unter 10 Losen sind genau 4 Gewinnlose.

$E_2$ : Unter 10 Losen ist mindestens ein Gewinn.

- c) Eine Zufallsgröße ist binomialverteilt mit dem Parameter  $n = 100$ . Weiterhin ist:  $\sigma = 3$ .  
Berechne die zugehörige Gewinnwahrscheinlichkeit.

3+2+4

**Lösung:**

- a) Es handelt sich um das Ziehen (mit Zurücklegen) von insgesamt fünf Kugeln aus der Urne, wobei 4 mal die goldene und einmal eine weiße oder schwarze Kugel gezogen wird.

(3)

b)

$E_1 \quad P_2$

$E_2 \quad P_3$

(2)

- c) Es ist

$$3 = \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$9 = 100p - 100p^2$$

$$0 = p^2 - p + \frac{9}{100}$$

Mit der  $p - q$ -Formel erhält man die möglichen Wahrscheinlichkeiten:  $p = \frac{9}{10}$  oder  $p = \frac{1}{10}$

(4)

A3. Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ggf. auch ihren Schnittpunkt.

5

**Lösung:**

Das Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt das Gleichungssystem:

$$-s = -1$$

$$2r - 2s = 2$$

$$r = 2$$

welches offenbar die Lösungen  $r = 2$  und  $s = 1$  hat. Die Geraden schneiden sich also. Setzt man  $s$  in  $g_2$  ein, dann erhält man den Schnittpunkt bei  $(1/6/3)$

(5)

## Teil 2 (Hilfsmittel: GTR, Tafelwerk)

A4. Der Zulauf ( $f(t) > 0$ ) oder Ablauf ( $f(t) < 0$ ) des Wassers in ein Auffangbecken wird zwischen 0:00 Uhr und 4:00 Uhr jede Stunde gemessen. Die zugehörigen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Zeit $t$ [in Stunden]	0	1	2	3	4
Wasserstand [in Meter]	0	0.2	1.3	1.2	-0.3

a) Der Zu-/Abfluss soll durch eine ganzrationale Funktion vierten Grades modelliert werden. Dabei soll  $t$  als Maßzahl für die Zeit in Stunden und  $f(t)$  als die Wassermenge in  $m^3/min$  aufgefasst werden.

(1) Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion  $f(t)$ , welche durch die oben angegebenen Messpunkte verläuft. Die Koeffizienten sollen dabei auf 2 Nachkommastellen gerundet angegeben werden.

[Zur Kontrolle:  $f(t) = 0.08t^4 - 0.83t^3 + 2.37t^2 - 1.43t$ ]

(2) Begründe, warum die Funktion  $f(t)$  an diesem Tag nur bis 5:45 Uhr zur Modellierung herangezogen werden kann.

[Verwende im Weiteren das Intervall von 0:00 Uhr bis 5:45 Uhr als Definitionsbereich der Funktion.]

(3) Ermittle die prozentuale Abweichung der Modellfunktion vom tatsächlichen Wert um 2:00 Uhr.

5+3+3

b)

(1) Bestimme die Zeitpunkte innerhalb des oben angegebenen Zeitintervalls in Stunden und Minuten, an denen weder Wasser in das Auffangbecken zu- noch abfließt.

(2) Bestimme die Zeitpunkte zwischen 0:00 Uhr und 4:00 Uhr, an denen der Zu-/Ablauf seine maximalen und minimalen Werte annimmt.

4+10

c) Mit der Stammfunktion  $F(t)$  der Funktion  $f(t)$  kann der aktuelle Wasserstand im Auffangbecken berechnet werden.

(1) Gib die Gleichung einer Stammfunktion an.

(2) Gib begründet an, zu welchem Zeitpunkt der Wasserstand im Auffangbecken am größten ist.

(3) Um 0:00 Uhr waren  $100m^3$  Wasser im Auffangbecken. Bestimme die Wassermenge, die um 4:00 Uhr im Auffangbecken ist.

2+4+2

### Lösung:

a)

(1) Aus der Aufgabenstellung ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$e = 0$$

$$a + b + c + d = 0.2$$

$$16a + 8b + 4c + 2d = 1.3$$

$$81a + 27b + 9c + 3d = 1.2$$

$$256a + 64b + 16c + 4d = -0.3$$

Dieses hat mit dem GTR die Lösungen:  $a = 0.0792$ ,  $b = -0.825$ ,  $c = 2.3708$  und  $d = -1.425$ .

Mit Rundung auf zwei Nachkommastellen ergibt sich die obige Funktion.

(5)

(2) Mit dem GTR kann gezeigt werden, dass für  $t > 5.75$  der Graph der Funktion steil ansteigt und schließlich gegen Unendlich strebt. Das ist für einen Zulauf von Wasser in ein Auffangbecken sicherlich nicht sinnvoll.

(3)

(3) Es ist  $f(2) = 1.32$  und damit ergibt sich:  $\frac{1.32}{1.3} \approx 1.01538$ . Die Abweichung beträgt also circa 1.5%.

(3)

b)

- (1) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion, also die Lösung der Gleichung:

$$0 = 0.08t^4 - 0.83t^3 + 2.37t^2 - 1.43t$$

Mit dem GTR ergeben sich die Lösungen:  $t = 0$ ,  $t = 0.82$ ,  $t = 3.76$  und  $t = 5.8$

Da die letzte Nullstelle außerhalb des Definitionsbereichs liegt, braucht sie nicht berücksichtigt zu werden.

Die Uhrzeiten sind demnach: 0:00 Uhr ( $t=0$ ), 0:49 ( $t=0.82$ ) und 3:45 ( $t=3.76$ ).

(4)

- (2) Die Ableitungen der Zuflussfunktion sind:

$$f'(t) = 0.32t^3 - 2.49t^2 + 4.74t - 1.43$$

$$f''(t) = 0.96t^2 - 4.98t + 4.74$$

Die notwendige Bedingung  $f'(t) = 0$  hat mit dem GTR die Lösungen:  $t = 0.37$ ,  $t = 2.42$  und  $t = 4.99$ .

Weiterhin ist:  $f''(0.37) \approx 3 > 0$ , dort liegt also ein Minimum vor (0.37/-0.25).  $f''(2.42) \approx -1.7 < 0$  dort liegt also das Maximum (2.42/1.4)

Die Randwerte sind: (0/0) und (4/-0.44).

Das Maximum wird also um 2:25 Uhr erreicht und das Minimum um 4:00 Uhr.

(4+2+2+2)

c)

(1)  $F(t) = 0.016t^5 - 0.2075t^4 + 0.79t^3 - 0.715t^2$

(1)

- (2) Die Funktion  $f(t)$  hat Nullstellen bei:  $t = 0$ ,  $t = 0.8$ ,  $t = 3.8$

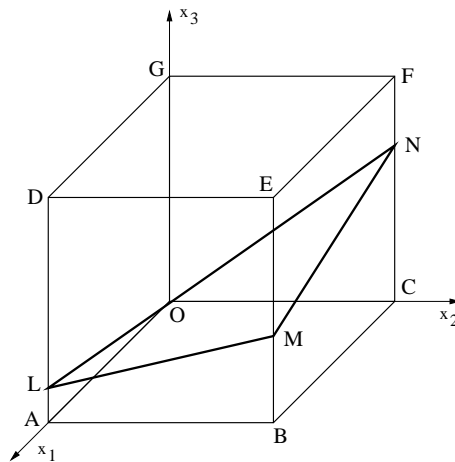
Zwischen  $t = 0$  und  $t = 0.8$  verläuft der Funktionsgraph unterhalb der  $t$ -Achse, es fließt also nur Wasser ab. Bei  $t = 3.8$  wechselt der Zufluss wieder in einen Abfluss. Daher muss  $F(t)$  dort ihr Maximum haben.

(4)

(3) Es ist:  $100 + \int_0^4 f(t) dt = 100 + 2.384 = 102.384m^3$

(2)

- A5. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $O(0/0/0)$ ,  $A(8/0/0)$ ,  $B(8/8/0)$ ,  $C(0/8/0)$ ,  $D(8/0/8)$ ,  $E(8/8/8)$ ,  $F(0/8/8)$  und  $G(0/0/8)$  Eckpunkte eines Würfels  $OABCDEFG$ . Außerdem sind die Punkte  $L(8/0/1)$ ,  $M(8/8/3)$  und  $N(0/8/5)$  gegeben (Siehe Abbildung).



- a)
- (1) Zeige, dass das Dreieck  $LMN$  gleichschenkelig ist.
  - (2) Zeige, dass das Dreieck  $LMN$  nicht rechtwinklig ist.
  - (3) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks  $LMN$ .  
[Zur Kontrolle: Der Flächeninhalt des Dreiecks  $LMN$  beträgt  $24 \cdot \sqrt{2}$  FE.]
- 4+4+5
- b)
- (1) Ermittle eine Parametergleichung der Ebene  $H$ , welche die Punkte  $L$ ,  $M$  und  $N$  enthält.  
[Mögliches Ergebnis:  $H : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ]
  - (2) Ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts  $S$  der Geraden  $g$  welche durch die Punkte  $P(11/-3/20)$  und  $D$  festgelegt ist mit der Ebene  $H$ .  
[Kontrolle:  $S(\frac{58}{9}/\frac{14}{9}/\frac{16}{9})$ ]
  - (3) Die Gerade  $g$  schneidet die Ebene  $H$  senkrecht. Bestimme mit dieser Information das Volumen der Pyramide  $LMND$ .
- 5+6+5
- c)
- (1) Bestimme den Schnittpunkt  $T$  der Ebene  $H$  mit der  $x_3$ -Achse.
  - (2) Skizziere das Schnittgebilde der Ebene  $H$  mit dem Würfel  $OABCDEFG$ .
  - (3) Zeige, dass das Schnittgebilde der Ebene  $H$  mit dem Würfel  $OABCDEFG$  eine Raute ist.
- 3+3+3

### Lösung:

- a)
- (1) Es ist  $\vec{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Offenbar haben beide die gleiche Länge  $\sqrt{68}$  und sind somit gleichschenkelig. (4)
  - (2) Da  $|LM| = |MN|$  kann der rechte Winkel nur bei  $M$  liegen. Da aber  $\vec{LM} \cdot \vec{MN} = 4 \neq 0$ , ist das Dreieck nicht rechtwinklig. (4)
  - (3) Da das Dreieck gleichschenkelig ist, trifft seine Höhe auf den Mittelpunkt der Strecke  $LN$ , dieser hat die Koordinaten  $R(4/4/3)$ . Es ist:

$$\vec{LN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{LN}| = \sqrt{144} = 12$$

$$\vec{RM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{RM}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Damit ist die gesuchte Fläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{2} = 24 \cdot \sqrt{2} \text{ FE} \quad (5)$$

b)

(1) Eine Parametergleichung von  $H$  erhält man als:

$$H : \vec{x} = \vec{m} + r\vec{LM} + s\vec{M} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(2) Die Gerade  $g$  kann geschrieben werden als:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Setzt man diese gleich der Ebenengleichung, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS hat die Lösungen:  $r = -\frac{29}{36}$ ,  $s = \frac{7}{36}$  und  $t = -\frac{14}{27}$ . Setzt man  $t$  in die Geradengleichung ein, erhält man als Schnittpunkt:  $S(\frac{58}{9}/\frac{14}{9}/\frac{16}{9})$ . (6)

(3) Das Volumen einer Pyramide berechnet sich zu:  $\frac{G \cdot h}{3}$ . Weiterhin ist:

$$|DS| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{14}{9} \\ -\frac{56}{9} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{392}{9}} = \frac{14}{3}\sqrt{2}$$

Damit lässt sich das Volumen berechnen:

$$V = 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{14}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{224}{3} \approx 74.67 \text{ VE} \quad (5)$$

c)

(1) Um den Schnittpunkt der Ebene  $H$  mit der  $x_3$ -Achse zu bestimmen, müssen die erste und die zweite Koordinate 0 sein. Damit ergibt sich, dass  $r = -1$  und  $s = 1$ . Setzt man diese Werte in die Ebenengleichung ein, ergibt sich der Schnittpunkt  $T(0/0/3)$ . (3)

(2) Hier reicht eine "graphische" Lösung. (3)

(3) Es ist:

$$\vec{NT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ und } \vec{TL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Strecken  $|NT|$  und  $|TL|$  genau so lang, wie die Strecken  $|LM|$  und  $|MN|$  und damit das Viereck eine Raute. (3)