# 3. Semester 9.12.2021

## Mathematik Cremer

## Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 40 min.

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Gib für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitungsfunktion an.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ b) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$
c) $f(x) = x + x^{-1} + x^{-2}$ d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{0.3}$

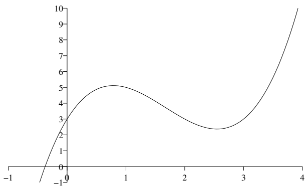
**Lösung:**

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$ b) $f'(x) = 4x^3 - 14x$
c) $f'(x) = 1 - x^{-2} - 2x^{-3}$ d) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 0.3x^{-0.7}$

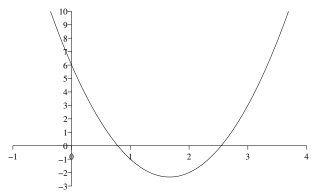
A2. Gib von der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 7x + 5$ die ersten drei Ableitungsfunktionen an.
**Lösung:**

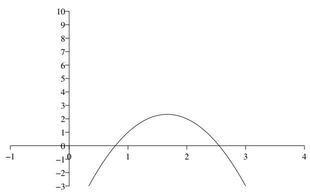
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 6x - 7 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x + 6 \\ f'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

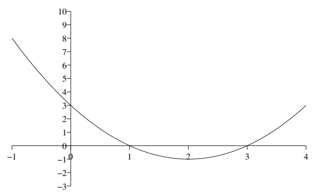
A3. Gegeben ist der Graph einer Funktion:



Weiterhin sind die folgenden drei Graphen gegeben:


a)


b)


c)

Gib für jeden der drei Graphen begründet an, ob es sich um den Graphen der Ableitungsfunktion von obiger Funktion handeln kann. Für jeden der drei Graphen muss angegeben werden, ob es sich um die Ableitungsfunktion handelt oder nicht und mindestens ein Argument, warum das so ist.
**Lösung:**

a) Ist der Graph der Ableitungsfunktion, weil die Nullstellen genau mit den Extremwerten überein stimmen und auch monoton steigende und fallende Bereiche mit Bereichen über/unter der $x$-Achse.
b) Nicht die Ableitungsfunktion, weil zwar die Nullstellen 'stimmen', aber Monotonieverhalten und Bereiche oberhalb/unterhalb der $x$-Achse nicht überein stimmen.
c) Kein Graph der Ableitungsfunktion, weil die Nullstellen nicht mit den Extremstellen überein stimmen.

A4. Berechne die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 3$.
**Lösung:**
Die Tangente geht durch den Punkt $P(3/9)$ und hat die Steigung $m = f'(3) = 6$.

Damit ist:

$$\begin{aligned}9 &= 6 \cdot 3 + n\\ 9 &= 18 + n\\ -9 &= n\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Gleichung

$$t(x) = 6x - 9$$

A5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

Berechne die Extrem- und Wendestellen dieser Funktion.
**Lösung:**
Für die Extrem- und Enedestellen werden die ersten drei Ableitungen gebraucht, diese sind:

$$\begin{array}{ll} f'(x) & = 3x^2 - 18x + 24\\ f''(x) & = 6x - 18\\ f'''(x) & = 6\end{array}$$

Die notwendige Bedingung für das vorliegen eines Extremums ist $f'(x) = 0$, dazu ergibt sich:

$$\begin{aligned}0 &= 3x^2 - 18x + 24\\ &= x^2 - 6x + 8\\ x_{1,2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 8}\\ &= 3 \pm \sqrt{1}\\ x_1 = 2 &\quad x_2 = 4\end{aligned}$$

Für die hinreichende Bedingung $(f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}f''(2) &= 6 \cdot 2 - 18 = -6 \Rightarrow \text{ Max.}\\ f''(4) &= 6 \cdot 4 - 18 = 6 \Rightarrow \text{ Min.}\end{aligned}$$

Für die $y$-Werte ergibt sich:

$$\begin{aligned}f(2) &= 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20\\ &\text{HP}(2/20)\\ f(4) &= 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 16\\ &\text{TP}(4/16)\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle ist $f''(x) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}0 &= 6x - 18\\ 18 &= 6x\\ 3 &= x\end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist erfüllt, da $f'''(3) = 6 \neq 0$ und der Funktionswert: $f(3) = 18$. Damit ist der Wendepunkt WP(3/18).

# Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A6. Berechne die Extremstelle der Funktion $f(x) = x^4$.
**Lösung:**
Die Ableitungsfunktion ist: $f'(x) = 4x^3$. Diese hat als einzige Nullstelle $x = 0$. Da aber auch $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$ ist, muss das Vorzeichenwechselkriterium angewendet werden.
Es ist $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4 < 0$ und $f(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0$.
Die Funktion hat also bei $x = 0$ ein Minumum.

A7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

a) Gib an, ob und welches Symmetrieverhalten der Graph der Funktion zeigt.
b) Gib das Verhalten des Funktionsgraphen '*im Unendlichen*' an.
c) Berechne alle Nullstellen der Funktion.
d) Gib die ersten drei Ableitungen der Funktion an.
e) Berechne alle Extrempunkte des Funktionsgraphen.
f) Berechne den Wendepunkt des Funktionsgraphen.

**Lösung:**
a) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung
b) $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.
c) Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 4x \\ &= x(x^2 - 4) \\ x = 0 \quad & x^2 = 4 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also: $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$.

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

e) Die notwendige Bedingung ist $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 4 \\ 4 &= 3x^2 \\ \frac{4}{3} &= x^2 \\ x \approx 1.15 \vee & \quad x \approx -1.15 \end{aligned}$$

Da $f''(1.15) = 6 \cdot 1.15 > 0$ liegt bei $x = 1.15$ ein Minumum vor. Aus Gründen der Symmetrie liegt bei $x = -1.15$ ein Maximum.
Weiter ist $f(1.15) \approx -3.08$ daraus ergibt sich der Tiefpunkt: $\mathrm{TP}(1.15/-3.08)$ und aus Symmetriegründen ein Hochpunkt bei $\mathrm{HO}(-1.15/3.08)$.

f) Hier ist die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$, was offenbar für $x = 0$ der Fall ist. Da außerdem $f'''(x) \neq 0$ liegt bei $(0/0)$ der Wendepunkt.

A8. Am 4.12.2021 schwappte eine Hochwasserwelle durch Venwegen. Der Verlauf dieser Hochwasserwelle lässt sich mit der Funktion

$$h(t) = t^3 - 16t^2 + 63t$$

beschrieben, wobei $t$ die Anzahl der Stunden nach 0:00 Uhr ist und $h(t)$ den Wasserstand in Zentimetern über/unter dem Normalpegel angibt.

a) Bestimme, zu welchen Uhrzeiten der Wasserstand gleich dem Normalpegel ist.
b) Bestimme zu welchem Zeitpunkt das Hochwasser am höchsten steht und bestimme auch die Höhe des Hochwassers über dem Normalpegel zu diesem Zeitpunkt.

c) Berechne, wann der Wasserstand am stärksten sinkt.

**Lösung:**

a) Hier sind die Nullstellen gesucht, also die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Der GTR liefert: $x = 0$, $x = 7$ und $x = 9$. Um 0:00, 7:00 und 9:00 Uhr hat also der Fluss seinen Normalpegel.

b) Hier ist das Maximum gesucht. Dazu müssen die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt werden.

$$0 = 3t^2 - 32t + 63$$

$$x \approx 2.6 \qquad x \approx 8.06$$

Da $f''(2.6) = 6 \cdot 2.6 - 32 = -16.4 < 0$ liegt bei $x = 2.6$ ein Maximum vor.
Da weiter $f(2.6) =\approx 73.22$ ist, erfolgt das größte Hochwasser um 2:36 Uhr mit einer Höhe von 73cm über dem Normalpegel.

c) Hier ist der Wendepunkt der Funktion gesucht:

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 32 \\ 32 &= 6x \\ 5./overline3 &= x \end{aligned}$$

Da weiterhin $f'''(5.\overline{3}) = 6$ sinkt das Hochwasser um 5:20 Uhr am stärksten.

# 4. Semester 8.12.2021

## Mathematik Cremer

## Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 40 min.

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Berechne

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\2\\-5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ e) $5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ f) $(-2)\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$

**Lösung:**

a) $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}9\\4\\-5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}10\\10\\-15\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$

A2. Löse die folgenden Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned}x+y&=3\\x+z&=4\\3x+2y+z&=10\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}a+b+c&=4\\a-b+c&=2\\a+c&=4\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}2x+y-z&=6\\x-2y+z&=-1\\x+z&=1\end{aligned}$

**Lösung:**

a)

$$\begin{aligned}x&=3-y\\3-y+z&=4\\9-3y+2y+z&=10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=3-y\\-y+z&=1\\-y+z&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=3-y\\z&=1+y\\-y+1+y&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=3-y\\z&=1+y\\1&=1\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

b)

$$\begin{aligned}4-c+b+c&=4\\4-c-b+c&=2\\a&=4-c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=0\\-b&=-2\\a&=4-c\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist unlösbar.

c)

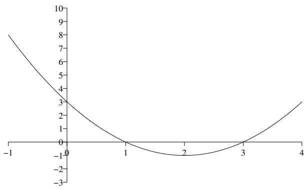
$$\begin{aligned} 2 - 2z + y - z &= 6 \\ 1 - z - 2y + z &= -1 \\ x &= 1 - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 3z &= 4 \\ -2y &= -2 \\ x &= 1 - z \end{aligned}$$

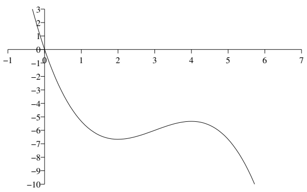
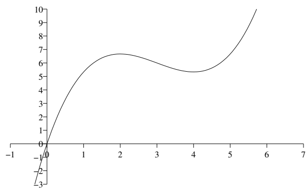
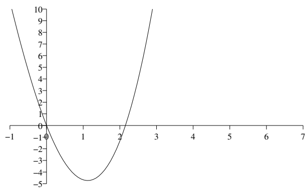
$$\begin{aligned} -3z &= -3 \\ y &= 1 \\ x &= 1 - (-1) \end{aligned}$$

Die Lösung ist: $x = 2$, $y = 1$ und $z = -1$

A3. Gegeben ist der Graph einer Funktion:



Weiterhin sind die folgenden drei Graphen gegeben:

a)  b)  c) 

Gib für jeden der drei Graphen begründet an, ob es sich um den Graph einer Stammfunktion der obigen Funktion handeln kann oder nicht. Für jeden Graphen muss mindestens ein Argument angegeben werden!

**Lösung:**

a) Kann nicht Stammfunktion sein, weil zwischen 0 und 2 eine Fläche positiv wäre.

b) Ist der Graph der Stammfunktion, weil z.B. die Nullstellen mit den Extremstellen überein stimmen.

c) Kann nicht die Stammfunktion sein, weil die Nullstellen nicht an den Stellen der Extrema liegen.

A4. Gib für die folgenden Funktionen eine Stammfunktion an

$$\text{a)} \qquad f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7 \qquad \text{b)} \qquad f(x) = x + x^{-2} + x^{-3}$$

**Lösung:**

$$\text{a)} \qquad F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x \qquad \text{b)} \qquad F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}$$

A5. Berechne das folgende bestimmte Integral

$$\int_0^2 (x^2 + 3x - 2)\,dx$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_0^2 &= \frac{1}{3}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 2 \cdot 2 - 0 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 \\ &= \frac{8}{3} + 6 - 4 \\ &= \frac{14}{3} \approx 4.\overline{6} \end{aligned}$$

# Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A6. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen

a) $\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $2\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

a) $\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $2\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

A7. Gib die Lösung des folgenden Gleichungssystems an.

$$\begin{array}{rrcl} I & 0.2x - 0.3y + 0.4z & = & 0.41 \\ II & -0.1x + 0.5y - 1.2z & = & -1.15 \\ III & 1.3x + 0.7y - 0.3z & = & 2.05 \end{array}$$

**Lösung:**
Der GTR liefert: $x = 1.2$, $y = 1.3$ und $z = 1.4$

A8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

a) Gib an, welche Art von Symmetrieverhalten die Funktion zeigt.
b) Gib das Verhalten der Funktion im Unendlichen an.
c) Bestimme alle Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen der Funktion.
d) Der Graph der Funktion schließt mit der $y$-Achse eine Fläche ein. Bestimme die Größe dieser Fläche.

**Lösung:**
a) Achsensymmetrisch zur $y$-Achse.
b) $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ und $x = 3$.

$f'(x) = 4x^3 - 20x$
$f''(x) = 12x^2 - 20$
$f'''(x) = 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \approx -2.24$, $x = 0$ und $x = \sqrt{5} \approx 2.24$
$f''(2.24) = 40 > 0$, also Minimum bei $x = -2.24$ und $x = 2.24$ (Symmetrie)
$f''(0) = -20 < 0$, also Maximum bei $x = 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -1.3$ und $x \approx 1.3$.
Da $f'''(x) \neq 0$ für alle $x$, liegen bei $x = -1.3$ und $x = 1.3$ Wendestellen vor.

d) Aufgrund der Symmetrie und der Nullstellen ergibt sich die folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^3 f(x)\,dx\right|\right) \\ &= 2(5.867 + 20.27) \\ &= 52.27 \text{ FE} \end{aligned}$$

A9. Ein neu gebauter Wasserturm fasst 1000m$^3$ Wasser. Er soll nun erstmalig gefüllt werden. Die Füllung beginnt um 0:00 Uhr, um so zumindest zu Beginn nicht zu viel an Entnahme an Wasser zu haben.
Für die ersten 12 Stunden folgt die Befüllung des Wasserturms dem Verlauf der Funktion

$$f(x) = x^3 - 20x^2 + 96x$$

Dabei gibt $x$ die Stunden nach 0:00 Uhr an und $f(x)$ die Menge an Wasser, was (in Kubikmeter) pro Stunde in den Turm hinein ($f(x) > 0$) oder heraus ($f(x) < 0$) fließt.

a) Bestimme die Zeiten, an denen kein Wasser in den Turm hinein und keines heraus fließt.
b) Gib die Bedeutung der Nullstelle $x = 8$ im Sachzusammenhang an.
c) Bestimme den Zeitpunkt, an dem das meiste Wasser in den Turm hinein fließt.
d) Bestimme den Zeitpunkt, an dem der Zufluss an Wasser am stärksten abnimmt.
e) Bestimme die Menge an Wasser, die nach 12 Stunden im Turm ist.

**Lösung:**

a) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion, also die Lösungen von $f(x) = 0$. Diese sind $x = 0$, $x = 8$ und $x = 12$.

b) Da der Funktionsgraph zwischen $x = 0$ und $x = 8$ ständig oberhalb der $x$-Achse verläuft, gibt diese Nullstelle des Zeitpunkt an, an dem sich maximal viel Wasser im Turm befindet.

c) Hier ist das Maximum der Funktion gesucht.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 40x + 96 \\ f''(x) &= 6x - 40 \end{aligned}$$

Die notwendige Bedinung ist: $f'(x) = 0$. Das ist der Fall bei $x \approx 3.14$ und $x \approx 10.19$.
Da $f''(3.14) \approx -21.16$ muss dort ein Maximum liegen, das ist gegen 3:08 Uhr.
Hier ist der Wendepunkt gesucht. Die notwendige Bedingung ergibt, dass nur bei $x = 6.67$ ein Wendepunkt liegen kann. Da außerdem die dritte Ableitung immer ungleich Null ist, muss dort auch ein Wendepunkt liegen.
Somit sinkt der Zufluss um 6:40 Uhr am stärksten.

d) Die Gesamtwassermenge ergibt sich durch:

$$\int_0^{12} f(x)\,dx = 576$$

Somit befinden sich nach 12 Stunden 576m$^3$ im Turm.