Jgst. 13/I 1. Klausur 6.11.2002

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.html

A1. Gegeben sind die vier Punkte $A(1/1/0)$, $B(2/0/1)$, $C(-1/1/1)$ und $D(0/3/2)$.

a) Durch die Punkte A, B und C ist ein Dreieck gegeben. Bestimme die Seitenlängen des Dreiecks.

Lösung:

Bezeichnet man die Vektoren, die die Seiten des Dreiecks bilden mit $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$ und $\vec{c} = \vec{AB}$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{c} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} &= \sqrt{9+1+0} &= \sqrt{10} \\
|\vec{b}| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} &= \sqrt{4+0+1} &= \sqrt{5} \\
|\vec{c} &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} &= \sqrt{1+1+1} &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

b) Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks?

Lösung:

Der Winkel α soll beim Punkt A liegen, also zwischen den Vektoren $\vec{c}$ und $-\vec{b}$. Durch die Umorientierung des Vektors $\vec{b}$ ändert sich dessen Länge nicht. Weiterhin gilt:

$$-\vec{b}\vec{c} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(2+0-1) = -1$$

Somit ergibt sich der Ansatz

$-1 = \sqrt{5}\sqrt{3}\cos\alpha$

und damit

$\alpha \approx 105°$

Analog gilt für den Winkel β zwischen $\vec{a}$ und $-\vec{c}$

$4 = \sqrt{10}\sqrt{3}\cos\beta$

und damit

$\beta \approx 43°$

Der Winkel γ berechnet sich mit dem Innenwinkelsatz zu

$$\begin{aligned}
\gamma &= 180° - 105° - 43° \\
&= 32°
\end{aligned}$$

c) Das Dreieck liegt in einer Ebene. Gib **eine** mögliche Gleichung der Ebene an.

Lösung:

Da z.B. die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schon berechnet sind und als Richtungsvektoren geeignet, kann die Ebenengleichung mit dem Ortsvektor von C als Ortsvektor der Ebene, geschrieben werden als:

$$e : \vec{x} = (\,-1/cr1/cr1/cr\,) + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Zeige, daß der Punkt D nicht in der Ebene liegt. Sollte die Teilaufgabe c) **nicht** gelöst worden sein, dann soll statt dessen mit der Ebene

$$e:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

gerechnet werden.

Lösung:

Zur Feststellung, ob der Punkt in der Ebene liegt, muß der Ortsvektor des Punktes mit der Ebenengleichung gleichgesetzt werden. Nach Variablen und Zahlensortiert ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} 0 &=& -1-3\lambda+2\mu \\ 3 &=& 1+\lambda \qquad\qquad \Rightarrow \lambda=2 \\ 2 &=& 1-\mu \qquad\qquad \Rightarrow \mu=-1 \end{array}$$

Werden die Werte für λ und μ in die erste Gleichung eingesetzt, dann ergibt sich $0=-9$, woraus folgt, daß D nicht in e liegt.

e) Berechne einen Normalenvektor der Ebene

Lösung:

Da ein Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ senkrecht auf der Ebene steht, muß sein Skalarprodukt mit beiden Richtungsvektoren der Ebene Null ergeben. Somit ist:

$$\begin{array}{llll} I & -3n_1+n2 &=& 0 \\ II & 2n_1-n_3 &=& 0 \end{array}$$

Mit z.B. $n_1=1$, dann ergibt sich

$$\begin{array}{llll} I & n_2 &=& 3 \\ II & n_3 &=& 2 \end{array}$$

Und damit ein Normalenvektor zu $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

f) Bestimme mit diesem Normalenvektor ein Gerade, die durch den Punkt D geht und senkrecht auf der Ebene e steht.

Lösung:

Es muß nur der Ortsvektor von D als Ortsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Gerade verwendet werden. Somit ergibt sich

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

g) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene?

Lösung:

In diesem Fall müssen Gerade und Ebene gleich gesetzt werden:

$$\begin{array}{llll} I & -1 &=& 3\lambda-2\mu+\nu \\ II & -2 &=& -\lambda+3\nu \\ III & -1 &=& \mu+2\nu \end{array}$$

Da nur der Wert für ν interessant ist, reicht es das Gleichungssystem bis zu dessen Lösung zu berechnen und es ergibt sich $\nu=-\frac{9}{14}$. Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts: $\vec{s}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-9\\15\\10\end{pmatrix}$

h) Wie groß ist der Abstand von D zur Ebene e?

Lösung:

Der gesuchte Abstand entspricht der Länge des Differenzvektors von D nach S (Schnittpunkt). Dieser ist: $\vec{d}-\vec{s}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}9\\27\\18\end{pmatrix}$. Dessen Länge beträgt nach obigem Verfahren: $|\vec{d}-\vec{s}|\approx 2,41\text{LE}$

i) Sei weiterhin die Gerade

$$g_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

gegeben. Wie liegt diese Gerade zu der obigen?

Lösung:

Auch für die gegenseitige Lage von Gerade müssen die entsprechenden Geradegleichungen gleich gesetzt werden. Dies ergibt das unlösbare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrcl}
I & 1+2\varphi & = & \nu \\
II & 1+3\varphi & = & 3+3\nu \\
III & \varphi & = & 2+2\nu
\end{array}
$$

Da außerdem die Richtungsvektoren kollinear sind, liegen die beiden Geraden parallel.