OI 1.Klausur 18.11.2003
GK M3
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.php4

A1. Bestimme von den folgenden Gleichungssystemen jeweils den Rang der homogenen Matrix, den der inhomogenen Matrix und beschreibe die Lösungsmenge (die Lösung soll **nicht** angegeben werden). Im Falle einer unendlichen Lösungsmenge muß die Anzahl der Freiheitsgrade angegeben werden.

a) $$\begin{aligned} x+2y+3z &= 14\\ 2x+y &= 4\\ 3x+z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+2y+3z &= 14\\ 2x+y &= 4\\ -3x+3z &= 6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+2y+3z &= 14\\ 2z+y &= 4\\ -3y-6z &= -23 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} a+2b+4c+d &= 3\\ a+2c+d &= 2\\ a+4b+6c+d &= 4\\ a-2b+d &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Rg(H)=Rg(I)=3, eindeutige Lösung
b) Rg(H)=Rg(I)=2, ∞ Lösungen, ein Freiheitsgrad
c) Rg(H)=2, Rg(I)=3, keine Lösung
d) Rg(H)=Rg(I)=2, ∞ Lösungen, zwei Freiheitsgrade

A2. Bestimme jeweils die gegenseitige Lage der folgenden Geraden und/oder Ebenen. Bestimme ggf. das Schnittgebilde.

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $e : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

d) $e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\lambda = \frac{3}{2}, \mu = \frac{1}{2}, SP(2, 5/1, 5/2)$
b) Unlösbares Gleichungssystem, da die Richtungsvektoren nicht linear abhängig sind, sind die Geraden windschief.
c) $\lambda = 2, \mu = 3, \nu = 4, SP(8/5/4)$
d) $\nu = \frac{3}{2} - \xi, g : \vec{x} = \begin{pmatrix}5/2\\3/2\\5/2\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

A3. Berechne die Länge der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ *b)* $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ *d)* $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\sqrt{5} \approx 2.24$
b) $\sqrt{14} \approx 3.74$
c) $\sqrt{14} \approx 3.74$
d) $\sqrt{30} \approx 5.48$

A4. Die Deutsche Gesellschaft für Flugsicherung hat, im Rahmen der Umstellung auf das GPS-System, die Darstellung von Fügen innerhalb Deutschlands auf vektoriellen Basis umgestellt. Zugrunde liegt ein Koordinatensystem, bei dem die erste Achse (x) der geographischen Länge, also der

Ausrichtung Ost-West, und die zweite Achse (y) der geographischen Breite, also der Ausrichtung Nord-Süd, entspricht. Die dritte Achse (z) gibt jeweils die Höhe der Flugroute an. Die Koordinaten entsprechen **nicht** den Koordinaten aus dem regulären Koordinatensystem der Erde.
Jeweils eine Einheit im Koordinatensystem entspricht dabei einem Kilometer in der Natur.
Aus Gründen der Vereinfachung wird in dieser Klausur angenommen, daß alle Orte auf Meeresniveau liegen, also die drite, die z-Koordinate, Null haben.
In diesem Sinne liegen die folgenden Orte an den folgenden Koordinaten:

Ort	Koordinate	Ortsvektor
Berlin	B(672/549/0)	$\begin{pmatrix} 673 \\ 549 \\ 0 \end{pmatrix}$
Hamburg	H(453/690/0)	$\begin{pmatrix} 453 \\ 690 \\ 0 \end{pmatrix}$
Köln	K(228/408/0)	$\begin{pmatrix} 228 \\ 408 \\ 0 \end{pmatrix}$
München	M(546/87/0)	$\begin{pmatrix} 546 \\ 87 \\ 0 \end{pmatrix}$

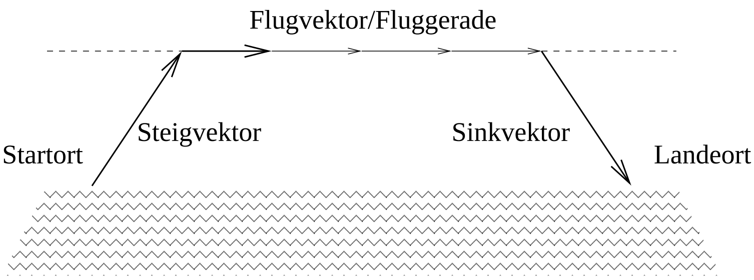
Aus Gründen der Sicherheit ist der Luftraum über Deutschland in einen nördlichen und einen südlichen Sektor geteilt. Die Sektoren werden durch die (senkrechte) Ebene:

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geteilt. Für den nördlichen Sektor ist die Flugverkehrskontrollstelle in Berlin, für den südlichen die in München zuständig.
Ein Flug läßt sich in diesem System, im einfachsten Falle folgendermaßen darstellen:

1. Der Flug beginnt entlang eines Startvektors, der bis zu einem Punkt führt, der auf Flugniveau liegt (Steigflug).
2. Dann folgt der eigentliche Flug, der entlang einer Gerade führt und horizontal verläuft.
3. Der Flug wird entlang eines Landevektors beendet, der vom Flugniveau wieder zum Erdboden zurück führt (Sinkflug).

Die folgende Skizze soll den Zusammenhang verdeutlichen:



a) Ein Flugzeug soll von München nach Hamburg fliegen. Der Startvektor ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$, der Landevektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$. Zeige, daß die Fluggerade sich durch:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 450 \\ 690 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

darstellen läßt. (Anleitung: Berechne zuerst den Punkt, der erreicht wird, wenn der Startvektor durchflogen wurde, danach den Punkt, ab dem der Landevektor geflogen werden muß. Durch diese beiden Punkten kann eine Gerade berechnet werden, von der dann zu zeigen ist, daß sie mit der Gerade g_1 identisch ist).

b) Für ein weiteres Flugzeug, das von Köln nach Berlin fliegen will, wird angegeben, daß die folgenden Angaben gelten: Startvektor $\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$, Sinkvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ und Fluggerade $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 220 \\ 400 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeige, daß sich die beiden Fluggeraden schneiden und berechne den Schnittpunkt. (Achtung: kein *glatten* Zahlen).

c) Die beiden Fluggeraden liegen in einer Ebene (e_2). Bestimme eine Gleichung dieser Ebene.
d) Zeige, daß sich die Ebenen e_1 und e_2 schneiden und berechne die Schnittgerade. (Achtung, auch hier ergeben sich *keine* glatten Zahlen).
e) Berechne, wie lange der Flug von München nach Berlin dauert, wenn du annimmst, daß eine Einheit einem Kilometer entspricht und das Flugzeug mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 600km/h fliegt.

Lösung:

a) Der Startvektor führt zum Punkt (550/90/10), der Punkt, ab dem der Landevektor geflogen werden muß ist (450/690/10). Damit ergibt sich die Gerade:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 550 \\ 90 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -100 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccc} 1 & -100 & -100 \\ -6 & 600 & 600 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -100 & -100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, und damit sind die beiden Geraden gleich.

b) Durch Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 230 \\ 6 & -1 & -290 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 230 \\ 0 & -19 & -1670 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ergeben sich die ungefähren Werte: $\lambda_1 \approx -33,68$ und $\lambda_3 \approx 87,89$. Wird einer der Werte in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt, ergibt sich der Schnittpunkt: S(483.68/487.89/10)

c) Am einfachsten läßt sich die Ebenengleichung durch die Ausgangspunkte der Aufgabe a) und den Endpunkt des Startvektors des zweiten Fluges (220/400/10) ermitteln. Damit ergibt sich:

$$e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 220 \\ 400 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 450-220 \\ 690-400 \\ 10-10 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 550-220 \\ 90-400 \\ 10-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 400 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 230 \\ 290 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 330 \\ -310 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Durch Gleichsetzen der Ebenen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -23 & -33 & 220 \\ 0 & 0 & 29 & 31 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -23 & -33 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 31 & 160 \end{array}$$

Somit ergibt sich ein Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen und nur einem Freiheitsgrad, somit schneiden sich die Ebenen.

Für die zweite Ebene ergibt sich, wenn man ν_2 festhält, $mu_2 = \frac{160-31\nu_2}{29}$. Somit lautet die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} 220 \\ 290 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{160-31\nu_2}{29} \begin{pmatrix} 23 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 33 \\ -31 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit ergibt sich die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} 346,90 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 24.59 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Zu berechnen sind zuerst einmal die notwendigen Vektoren des Fluges. Es ist zwar nicht ausdrücklich gesagt, aber sinnvoll können nur die entsprechenden Vektoren der anderen Flüge angenommen werden. Der Startvektor von München hat die Länge von $\sqrt{125}$, der Landevektor von Berkin die Länge $\sqrt{105}$. Die Flugvektor ist $\begin{pmatrix} 125 \\ 458 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit ist seine Länge $\sqrt{225389}$. Somit ergibt sich eine Gesamtstrecke von 496,18 Kilometern. Bei einer Geschwindigkeit von 600km/h ergibt sich eine Flugzeit von 0,83 Stunden oder ca. 50 Minuten.