OI 2.Klausur 20.1.2004
GK M3
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.php4

A1. Gegeben ist eine Ebene durch

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, daß der Punkt $P_1(2/3/1)$ nicht in der Ebene liegt.
b) Bestimme einen Normalenvektor der Ebene.
c) Wie lautet eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P_1 geht und die Ebene rechtwinklig schneidet?
d) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.
e) Ermittle mit deinen bisherigen Angaben den Abstand des Punktes P_1 von der Ebene.

Lösung:

a) Durch Gleichsetzen des Punktes mit der Ebene ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Offenbar ist der Rang der inhomogenen Matrix größer als der der homopgenen, woraus folgt, daß das Gleichungssystem nicht lösbar, der Punkt also nicht in der Ebene liegt.

b) Das Produkt eines Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit den beiden Richtungsvektoren der Ebene muß Null ergeben, also:

$$\begin{aligned} n_1 + 3n_2 + 3n_3 &= 0 \\ n_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein möglicher Normalenvektor ist daher ($n_3 = 1$): $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Die Gleichung ist:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Zur Bestimmung des Schnittpunkts müssen Ebene und Gerade gleich gesetzt werden:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt: $\lambda_1 = -\frac{1}{5}$, $\mu_1 = \frac{18}{5}$ und $\nu_1 = \frac{2}{5}$. Wird z.B. der Wert von ν_1 in die Geradengleichung eingesetzt, dann ergibt sich der Schnittpunkt: $SP(\frac{4}{5}/3/\frac{3}{5})$.

e) Der Abstand des Punktes P_1 von der Ebene ist gleich dem Abstand des Punktes vom Schnittpunkt mit der Ebene, also:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 3 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{6}{5}^2 + 0^2 + \frac{2}{5}^2} \approx 1.26$$

A2. In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. Durch die Punkte $P_1(5/4/5)$, $P_2(4/6/7)$ und $P_3(2/7/5)$ ist ein Parallelogramm festgelegt.

a) Berechne den vierten Punkt.
b) Berechne die Länge der Seiten.
c) Berechne die Winkel innerhalb des Parallelogramms.
d) Berechne den Flächeninhalt des Paralellogramms.
e) Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen.
f) Berechne die Länge der Diagonalen.

Lösung:

a) Um den vierten Punkt (P_4) zu berechnen, soll der Schnittpunkt der Geraden durch P_3 mit Richtungsvektor $\vec{p_2} - \vec{p_1}$ mit der Geraden durch P_1 und Richtungsvektor $\vec{p_3} - \vec{p_2}$ berechnet werden. Die Geraden sind:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Damit ist der vierte Punkt: $P_4(3/5/3)$

b) Die Länge der Seiten entspricht der Länge der Differenzvektoren der Punkte. Damit ergibt sich:

$$|P_1P_2| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$|P_2P_3| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Da gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm immer gleich lang sind, sind auch die anderen beiden Seiten jeweils 3LE lang.

c) Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{p_2} - \vec{p_1}$ und $\vec{p_4} - \vec{p_1}$ ist genau $90°$. Wenn allerdings ein Winkel $90°$ ist, dann sind alle Winkel innerhalb des Paralellogramms $90°$.

d) Da es sich um ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 handelt, ist der Flächeninhalt 9.

e) Der Schnittpunkt der Diagonalen liegt bei $SP(\frac{7}{2}/\frac{5}{2}/5)$

f) Die Länge der Diagonalen beträgt in beiden Fällen $\sqrt{18}$LE.

OI Nachschreibeklausur Januar 2004
GK M3
(CR)

A1. Zeige, daß die beiden Geraden:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

windschief sind. Gib beim zu bearbeitenden Gleichungssystem Rang der homogenen und inhomogenen Matrix an und argumentiere damit.

A2. Welchen kleinsten Abstand haben die beiden Geraden aus der letzten Aufgabe?

A3. Zeige, daß die beiden Ebenen:

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sich schneiden. Argumentiere wie in der ersten Aufgabe.

A4. Berechne den Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen.

A5. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1-p \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Für welceh Werte von p sind die drei Vektoren linear abhängig?

b) Zeige, daß die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für alle Werte von p linear unabhängig sind.

A6. Gegeben ist eine Gerade durch die Punkte $P(9/5/4)$ und $Q(2/1/0)$ und eine Ebene durch:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Ermittle die Länge des Lotes und seinen Fußpunkt (Punkt, an dem das Lot auf die Ebene stößt) vom Ursprung des Koordinatensystems auf die Ebene.

b) Ermittle Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden und der Ebene.

c) Berechne alle Punkte auf der Geraden, die von der Ebene den Abstand 4 haben.