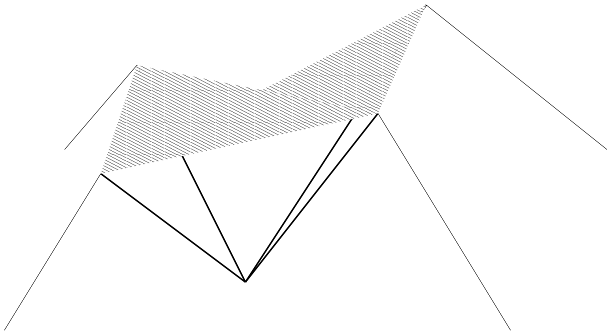
OI 1.Klausur 17.3.2004
GK M3
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.php4

A1. Für eine Firma sollst du ein Sonnensegel herstellen, das **ungefähr** das folgende Aussehen hat:



Das Sonnensegel besteht aus vier Masten (dick gezeichnet), die in einem Punkt aufgestellt sind. An ihren Enden ist jeweils ein Befestigungspunkt für das eigentliche Segel und für jeweils eine Abspannung (dünn gezeichnet).

Gehe davon aus, daß der gemeinsame Aufsetzunkt aller vier Masten der Ursprung des Koordinatensystems ist.

Die vier Masten sind gegeben durch die (Orts)Vektoren:

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

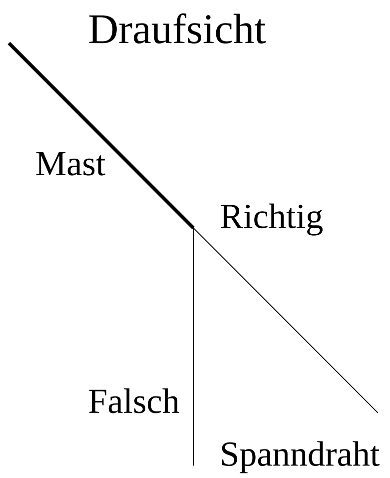
Hierbei gibt die x-Komponente die Ausrichtung nach rechts und links, die y-Komponente die Ausrichtung nach oben und unten und die z-Komponente die Ausrichtung nach vorne und hinten an. Eine Einheit entspricht hierbei einem Meter. (Hinweis: Es könnte sinnvoll sein eine Draufsicht des Sonnensegels anzufertigen.)

a) Zeige, daß die vier Eckpunkte des Sonnensegels nicht in **einer** Ebene liegen (Anleitung: Bestimme die Ebenengleichung für drei Endpunkte der Masten und zeige dann, daß der vierte Endpunkt nicht in der Ebene liegt.

b) Nachdem nun geklärt ist, daß die vier Endpunkte der Masten nicht in einer Ebene liegen, kann es nur so sein, daß das Segel aus zwei Dreiecken zusammengesetzt ist. Das erste Dreieck wird gebildet aus den Endpunkten der Masten: $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_4$; das zweite Dreieck aus den Endpunkten der Masten $\vec{m}_1, \vec{m}_3, \vec{m}_4$. Ein Quadratmeter des Segelstoffes kostet 35€ . Berechne die Kosten für das gesamte Segel.

c) Die Masten sollen so mit denn Spannseilen gespannt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Aufsetzpunkt des Mastes (0/0/0), der Befestigungspunkt des Seils an der Mastspitze und der Verankerungspunkt des Seils sollen '*in einer Linie*' liegen, also in die gleiche Richtung zeigen.
2. Der Winkel zwischen Mast und Spanndraht soll 90° betragen.



Berechne für den ersten Mast den Verankerungspunkt des Spanndrahtes.

d) Wie lang muß der Spanndraht für den ersten Mast sein?

e) Die zwei Dreiecke, aus denen das Sonnensegel zusammengesetzt ist, liegen jeweils in einer Ebene. Bestimme den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

Lösung:

a) Aus den ersten drei Mastendpunkten soll eine Ebenengleichung erstellt werden. Dazu wird der Endpunkt des ersten Mastes als Ortsvektor der Ebene verwendet und die Differenzvektoren zu den Endpunkten des zweiten und dritten Mastendpunktes als Richtungsvektoren (Man kann auch andere Punkte wählen):

$$\vec{m_2} - \vec{m_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m_3} - \vec{m_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die gesuchte Ebenengleichung:

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Um zu überprüfen, ob auch der vierte Endpunkt in dieser Ebene liegt, muß der Endpunkt des vierten Mastes mit der Ebenengleichung gleich gesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für den Gauß-Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}$$

Offensichtlich ist der Rang der homogenen Matrix kleiner als der der inhomogenen und daher das Gleichungssystem unlösbar. Der vierte Endpunkt liegt also nicht in der Ebene der ersten drei Mastenden.

b) Zur Berechnung der Kosten müssen die Flächen der beiden Dreiecke berechnet werden. Für das erste Dreieck sind schon die Differenzvektoren (Seitenkanten) von zwei Seiten bekannt. Daraus läßt sich der Winkel zwischen den Vektoren berechnen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos\alpha$$

$$7 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{13} \cos\alpha$$

$$\frac{7}{\sqrt{78}} = \cos\alpha$$

$$37.5714 \approx \alpha$$

Da nun für die Höhe (h) der zur Grundlinie $\vec{m_1} - \vec{m_3}$ gilt: $\frac{h}{|\vec{m_3} - \vec{m_1}|} = \sin\alpha$ ist die Höhe: $h = \sin 37.5714 \cdot \sqrt{13} \approx 2.1985$ Somit ist die Fläche des ersten Dreiecks: $\frac{\sqrt{13} \cdot 2.1985}{2} \approx 3.9634 m^2$.
Für das zweite Dreieck ergibt sich nach dem gleichen Verfahren eine Fläche von $6.8106 m^2$.
Die Gesamtfläche beträgt also ungefähr $10.77 m^2$ und damit die Kosten für das Segel ziemlich genau 377€ (377.09€).

c) Der Verankerungspunkt des Spanndrahtes muß in der selben Richtung liegen, wie der Mast. Dafür ist nur die Richtung des Mastes in x- und in z-Richtung maßgeblich. Er liegt daher auf der Geraden:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiterhin muß der '*Drahtvektor*' ($\vec{d}$) rechtwinklig zum Mastvektor $\vec{m_1}$ liegen, also die Bedinung erfüllen $\vec{d} \cdot \vec{m_1} = 0$. Mathematisch formuliert lauten die beiden Bedingungen daher:

$$\vec{m_1} + \vec{d} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m_1} \cdot \vec{d} = 0$$

In der Form des Gauß-Algorithmus ist das:

$$\begin{array}{ccccc}
d_1 & d_2 & d_3 & \lambda & \\
1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
\\
1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 3 & 1 & 4 & 4 \\
\\
1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 13 \\
\\
1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 14
\end{array}$$

Der Wert für λ reicht zur Berechnung des Verankerungspunktes. Dieser ist $\lambda = \frac{14}{3}$. Der Verankerungspunkt des Spanndrahtes ist daher:

$$\frac{14}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} \\ 0 \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

d) Die Länge des Drahtes ergibt sich aus dem Abstand zwischen Verankerungspunkt und Endpunkt des Mastes. Der Drahtvektor ist:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} \\ 0 \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{3} \\ -3 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Dessen Länge beträgt

$$\sqrt{(\frac{22}{3})^2 + (-3)^2 + (\frac{11}{3})^2} \approx 8.7305$$

Somit ist der Spanndraht ungefähr 8.73 Meter lang.

e) Der Winkel zwischen den Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen. Zur Berechnung des ersten Normalenvektors sollen die Differenzvektoren zwischen $\vec{m_1}, \vec{m_2}$ und $\vec{m_1}, \vec{m_3}$ verwendet werden (vergleiche Aufgabe a). Für den ersten Normalenvektor muß gelten:

$$\vec{n_1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\vec{n_1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Wählt man z.B. $n1 = 2$, dann ergibt sich der erste Normalenvektor zu: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Verwendet man für die zweite Ebene und den zweiten Normalenvektor die Differenzvektoren $\vec{m_1}, \vec{m_3}$ und $\vec{m_1}, \vec{m_4}$, dann ergibt sich als zweiter Normalenvektor: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Es gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{29}$$
$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{38}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = -7$$
$$\cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{38}}$$
$$\alpha \approx 102.1731$$

Je nach Sichtweise ist der Schnittwinkel also 102.1731° oder 77.8269°

A2. Gegeben ist eine Funktion durch ihre Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{4 + \ln(x)}{x}$$

a) Für welche Zahlen ist die Funktion definiert?
b) Bestimme die einzige Nullstelle der Funktion.
c) Zeige, daß für die Ableitungen gilt:

$$f'(x) = \frac{-3 - \ln(x)}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{5 + 2\ln(x)}{x^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-13 - 6\ln(x)}{x^4}$$

d) Berechne alle Extrema der Funktion.

e) Berechne alle Wendestellen der Funktion.

f) Zeichne, aufgrund deiner Ergebnisse, den Funktionsgraphen im Bereich von $x = 0.01$ bis $x = 0.1$.

g) Zeige, daß

$$F(x) = \frac{(4 + \ln(x))^2}{2}$$

eine Stammfunktion der obigen Funktion ist und berechne damit die Fläche, die von der Funktion und der x-Achse zwischen den x-Werten 0.01 und 0.1 eingeschlossen wird.

Lösung:

a) Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. Daher ist es auch kein weiteres Problem, daß noch ein x im Nenner steht, denn der Definitionsbereich umfaßt nur die positiven Zahlen.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4 + \ln(x)}{x} \\ 0 &= 4 + \ln(x) \\ -4 &= \ln(x) \\ e^{-4} &= x \\ 0.0183 &\approx x \end{aligned}$$

c) Die Ableitungen ergeben sich sofort durch Anwendung der Quotienteregel und Zusammenfassung des Ergebnisses.

d) Die notwendige Bedingung ist erfült für:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-3 - \ln(x)}{x^2} \\ 0 &= -3 - \ln(x) \\ \ln(x) &= -3 \\ x &= e^{-3} \\ x &\approx 0.0498 \end{aligned}$$

Für die hinreichende Bedingung ergibt sich:

$$\frac{5 + 2\ln(e^{-3})}{e^{-3}} \approx -20.0855$$

Daher ergibt sich, daß bei $\left(e^{-3}/20.0855\right)$ ein Maximum vorliegt.

e) In analoger Weise ergibt sich, daß bei $x = e^{-\frac{5}{2}}$ die notwendige Bedingung erfüllt ist und für die hinreichende Bedingung gilt: $f'''(e^{-\frac{5}{2}}) \approx 44052.9316$ und daher bei $(0.0821/18.2737)$ eine Wendestelle vorliegt.

g) Um zu zeigen, daß es sich um eine Stammfunktion handelt, muß die Ableitung von $F(x)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(4 + \ln(x))^2 \\ \text{ä}(z) &= z^2 \\ i(x) &= 4 + \ln(x) \\ \text{ä}'(z) &= 2z \\ i'(x) &= \frac{1}{x} \\ F'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{x} \cdot 2 \cdot (4 + \ln(x)) \\ &= \frac{4 + \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Somit gilt, wegen der Nullstelle bei:

$$\begin{aligned} \left| \int_{0.01}^{e^{-4}} f(x)dx \right| + \left| \int_{e^{-4}}^{0.1} f(x)dx \right| &= \left| \frac{(4 + \ln(x))^2}{2} \Bigg|_{0.01}^{e^{-4}} \right| + \left| \frac{(4 + \ln(x))^2}{2} \Bigg|_{e^{-4}}^{0.1} \right| \\ &= |0 - 0.1831| + |1.4406 - 0| \\ &= 1.6237 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche ist also ca. 1.6237FE groß.