

Lösungen als PDF-Datei unter

<http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.php4>

A1. Gegeben sind der Punkt P durch seinen Ortsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und eine Gerade g durch ihre Parameterform:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zeige, daß der Punkt nicht auf der Geraden liegt.
- Bestimme den (kleinsten) Abstand des Punktes von der Geraden.

A2. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Zeige, daß die beiden Geraden windschief zueinander liegen.
- Berechne den (kleinsten) Abstand der beiden Geraden zueinander.

A3. Gegeben ist eine Ebene e durch

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine Gerade g durch

$$g : \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Zeige, daß die Gerade parallel zur Ebene liegt.
- Bestimme den Abstand, den die Gerade zur Ebene hat.

A4. Bestimme den Winkel, den die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

miteinander einschließen.

A5. Gegeben sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$e := \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zeige, daß die Gerade die Ebene scheidet und berechne den Schnittpunkt.
- Unter welchem Winkel durchstößt die Gerade die Ebene?

A6. Berechnet werden soll das Ergebnis einer Projektion. Das Projektionszentrum (Z) ist gegeben durch den Ortsvektor:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Projektionsebene ist gegeben durch:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist der Buchstabe 'V' gegeben durch die drei Ortsvektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Berechne den Projektionsstrahl, der den zu \vec{v}_1 gehörenden Punkt auf der Projektionsebene abbildet.
- b) Berechne den Punkt in der Projektionsebene (V_1'), in der der Projektionsstrahl die Projektionsebene schneidet.
- c) Da für die Darstellung auch die scheinbare Entfernung des Punktes vom Betrachter eine Rolle spielt, soll die Entfernung von V_1 zu seinem projizierten Punkt V_1' berechnet werden.
- d) Ebenso wichtig für die Darstellung ist der Winkel, unter dem ein Objekt gesehen wird. Ab einem Winkel von 60° ist ein Punkt nicht mehr im Gesichtsfeld und braucht nicht gezeichnet zu werden. Unter welchem Winkel schneidet der Projektionsstrahl die Ebene?
- e) Führe die Berechnungen von a) bis d) auch für den Punkt V_2 durch.