OI GK M (CR) — 1.Klausur — 23.2.2004

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/13/13index.php4

A1. Tom und Fritz sind leidenschaftliche Spieler, die ihre Spiele immer selber erfinden. Sie spielen immer um Spielgeld (SG). Eines Tages schlägt Fritz Tom das folgende Spiel vor:

Jeder zahlt zunčhst ein SG in den Pott. Dann würfeln wir mit zwei Würfeln. Zeigt einer der beiden Würfel eine '5' oder eine '6', dann gewinne ich die beiden SG aus dem Pott, ansonsten du.

a) Bestimme den Ergebnisraum des Spiels mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.
Lösung:
Es gibt nur die beiden Ereignisse:
Es wird keine '5' oder '6' gewürfelt, bestehen aus den Ergebnissen: {(1/1), (1/2), (1/3), (1/4), (2/1), (2/2), (2/3), (2/4), (3/1), (3/2), (3/3), (3/4), (4/1), (4/2), (4/3), (4/4)}, oder
Es wird eine '5' oder '6' gewürfelt. Dieses Ereignis besteht aus den Ergebnissen: {(1/5), (1/6), (2/5), (2/6), (3/5), (3/6), (4/5), (4/6), (5/1), (5/2), (5/3), (5/4), (5/5), (5/6), (6/1), (6/2), (6/3), (6/4), (6/5), (6/6)}.
Da jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ hat, hat das erste Ereignis die Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{36}$ und das zweite die Wahrscheinlichkeit $\frac{20}{36}$.

b) Begründe, wieso die Vorgabe von Fritz fair erscheint.
Lösung:
Das Spiel scheint fair zu sein, da Fritz 'nur' bei zwei Punktzahlen gewinnt, Tom dagegen bei vier.

c) Wie oft können die beiden wahrscheinlich spielen, wenn beide zu Beginn des Spiels 10 SG haben? Wer wird gewinnen?
Lösung:
Um das berechnen zu können, muß der Erwartungswert der beiden berechnet werden. Für beide ist der Einsatz 1 SG und die beiden möglichen Spielausgänge bedeuten für jeden einen Gewinn von 0 SG oder 2 SG. Für Fritz ist der Erwartungswert:

$$E(\text{Fritz gewinnt}) = \frac{20}{36} \cdot 1 = \frac{2}{9}$$

Im Durchschnitt wird Fritz also pro Spiel $\frac{2}{9}$ SG gewinnen und Tom den entsprechenden Betrag verlieren. Da sie mit 10 SG beginnen werden sie voraussichtlich: $10 \div \frac{2}{9} = 45$ mal spielen können.

d) Nach 72 Spielen hat Fritz 16 SG und Tom dementsprechend 4 SG. Läßt sich daraus etwas über die Qualität der Würfel aussagen?

e) Gib veränderte Spielregeln an, unter denen das Spiel zu einem fairen Spiel wird.

A2. Bei Computergraphiken werden oft virtuelle, dreidimensionale Objekte, z.B. Buchstaben, auf den Bildschirm projiziert. Dies geschieht, indem die Eckpunkte der Objekte vektoriell im Computer aufgebaut werden und diese Eckpunkte dann von einem Projektionszentrum aus auf Bildpunkte in einer Ebene projiziert werden. Die Punkte in der Ebene lassen sich dann auf dem Computerbildschirm darstellen.
Der Buchstabe 'V' ist gegeben durch die Eckpunkte $V_1(1/1/1)$, $V_2(0/3/1)$ und $V_3(2/3/1)$. Das Projektionszentrum liege bei $P(1/1/10)$. Die Abbildungsebene sei die $xy-$Ebene

a) Berechne die Bildpunkte, die sich bei der Projektion des Buchstabens in die $xy-$Ebene ergeben.
Lösung:
Für alle drei Punkte muß eine Gerade berechnet werden, die durch den Punkt und das Projektionszentrum geht. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der x, y-Ebene ist dann der gesuchte Punkt. Für V_1 sieht die Rechnung folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \left[- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da jeder Punkt in der x, y-Ebene die z-Koordinaten Null hat, muß nur die dritte Zeile des Gleichungssystems untersucht werden:

$$\begin{aligned} 0 &= 10 - 9\lambda \\ \frac{10}{9} &= \lambda \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, dann ergibt sich der Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1' &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{10}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die beiden anderen Punkte ergibt sich nach dem gleichen Verfahren:

$$\begin{aligned} \vec{V}_2' &= \begin{pmatrix} -1/9 \\ 29/9 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{V}_3' &= \begin{pmatrix} 19/9 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Zeichne die Projektion des Buchstabens in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Berechne jeweils den Abstand der Eckpunkte des Buchstabens zu ihren Bildpunkten.
Lösung:
In allen drei Fällen muß die Länge des Differenzvektors berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die anderen beiden Punkte ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} \left| \vec{V}_2' \vec{V}_2 \right| &= 1{,}03 \\ \left| \vec{V}_2' \vec{V}_2 \right| &= 1{,}03 \end{aligned}$$

d) Die Gerade vom Projektionszentrum durch einen Punkt zu seinem Bildpunkt bezeichnet man auch als Projektionsstrahl. Welchen Winkel schließt der Projektionsstrahl für den dritten Punkt des Buchstabens 'V' (also V_3) mit der Projektionsebene ein?
Lösung:
Ein Normalenvektor der Projektionsebene kann ohne Rechnung als:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Nun ist noch der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und dem Richtungsvektor der Geraden aus Teilaufgabe a) berechnet werden. Dazu:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| &= 1 \\ \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{86} \approx 9{,}27 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} &= -9 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten läßt sich der Winkel berechnen:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-9}{1 \cdot 9,27}\right)$$
$$= 166,05°$$

Offensichtlich muß dieses Ergebnis noch von 180° subtrahiert werden, woraus sich ein Winkel von $13,95°$ ergibt.

e) Bei Beleuchtung mit Sonnenlicht fallen die Lichtstrahlen parallel ein. In einer Computersimulation wird das dadurch simuliert, daß eine leuchtende Ebene angenommen wird von der die Lichtstrahlen ausgehen. Für die Helligkeit des Bildpunktes ist dann die Entfernung des Punktes von dieser Ebene entscheidend. Gehe davon aus, daß als Beleuchtungsebene die Ebene:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verwendet wird. Berechne den Abstand des Punktes V_1 von dieser Ebene.

Lösung:

Zunächst muß ein Normalenvektor der Ebene bestimmt werden. Ein solcher Vektor ist:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nun soll dieser Vektor vom Punkt V_1 zur Ebene führen. Es ist also die Gleichung: $\vec{v}_1 + \nu\vec{n} = e$ zu lösen. Für den 'Streckfaktor' des Normalenvektors gilt: $\nu = \frac{3}{25}$. Die Länge des Normalenvektors ist: $|\vec{n}| = \sqrt{50}$. Somit ist die Entfernung des Punktes V_1 von der Beleuchtungsebene gleich: $\frac{3}{25} \cdot \sqrt{50} \approx 0,85$LE.

f) Wie würde sich das Abbild ändern, wenn man die Koordinaten aller Eckpunkte verdoppelte (Z.B. $V_1(2/2/2)$)? Die Aufgabe soll nicht rechnerisch sondern durch beschreibenden Text gelöst werden.

Lösung:

In diesem einfachen Fall wird einfach die Abbildung vergrößert.