Jgst. 13/I 1.Klausur 27.9.2012

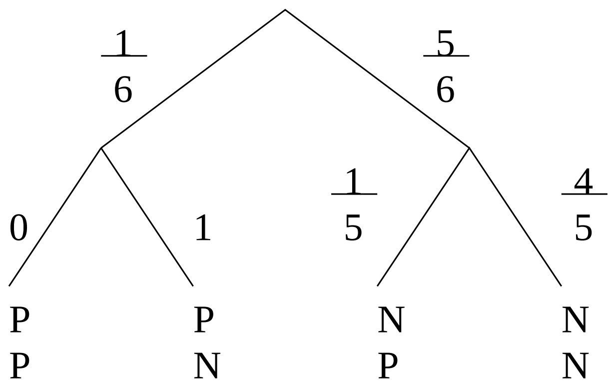
A1. Ein Weingroßhändler versucht (illegalerweise) seinen Gewinn dadurch zu vergrößern, dass in seine Weinkartons, die immer sechs Flaschen enthalten, fünf Flaschen mit normalem und eine Flasche mit gepanschtem Wein packt.

a) Im Einzelhandel entnimmt ein Verkäufer einer der oben genannten Weinkartons zwei Flaschen und bietet sie seinem Kunden zum Verkauf an. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass:
1. Beide Flaschen normalen Wein enthalten.
2. Nur die erste Flasche enthält normalen Wein.
3. In mindestens einer Flasche befindet sich normaler Wein.

b) Bei der nächsten Lieferung erhält der Einzelhändler sogar Kartons, in denen immer zwei Flaschen gepanschten Wein enthalten. Berechne für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit, das bei zwei Flaschen mindestens eine gepanschten Wein enthält.

Lösung:

a) Am einfachsten bestimmt man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit einem Baumdiagramm. Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.



Hier können die Wahrscheinlichkeiten einfach abgelesen werden:
1. $\frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6}$
2. $\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$
3. Das Ereignis ist sicher!

b) Hier ist es einfacher die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen. Diese ist

$$P(NN) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher:

$$P(\text{Mind. eine gepanscht}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

A2. Ein Spieler würfelt gleichzeitig mit zwei Würfeln. Fällt keine 'Eins', muss er einen Euro zahlen. Ansonsten erhält er für jede gewürfelte 'Eins' genau einen Euro.

a) Ordne jedem möglichen Ergebnis den zugehörigen Gewinn oder Verlust zu.

b) Fasse die Ergebnisse mit dem gleichen Gewinn/Verlust zu einem Ereignis zusammen und bestimme für jedes dieser Ereignisse die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Lösung:

a) Nur das Ergebnis 'Eins':'Eins' hat 2€ als Gewinn Weiterhin gibt es die fünf Ergebnisse 'Eins':'Zwei' ... 'Eins':'Sechs' mit einem Euro Gewinn. Außerdem gibt es noch die fünf Ergebnisse 'Zwei':'Eins' ... 'Sechs':'Eins' mit dem Gewinn von einem Euro. Alle anderen Ergebnisse haben den Verlust von einem Euro.

b) Es gilt die folgende Zuordnung:

$$P(X=-1) = \frac{25}{36}$$
$$P(X=1) = \frac{10}{36}$$
$$P(X=2) = \frac{1}{36}$$

A3. Ein Spiel geht nach folgenden Regeln: Man würfelt mit einem Würfel. Würfelt man eine Primzahl, erhält man das Doppelte der Augenzahl als Gewinn ind Euro. Würfelt man keine Primzahl, muss man die Augenzahl in Euro an die Bank bezahlen. Welchen Einsatz sollte die Bank verlangen, damit das Spiel fair wird?

Lösung:

Für die Augenzahlen gelten die folgenden Gewinne/Verluste:

1	2	3	4	5	6
-1	+4	+6	-4	+10	-6

Da jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ergibt sich der Erwartungswert:

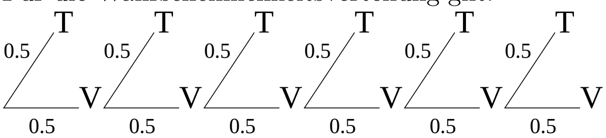
$$\mu = \frac{1}{6} \cdot (-1+4+6-4+10-6) = \frac{3}{2}$$

Die Bank sollte daher 1,50€ verlangen.

A4. Ein Schütze schießt so lange, bis er eine Tontaube getroffen hat, maximal aber sechs mal. Er trifft pro Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Schüsse. Stell die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X auf und berechne den Erwartungswert.

Lösung:

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:



Aus dieser Abbildung ergibt sich, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ mit einem Schuss trifft, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ braucht er zwei Schüsse, ... und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{32}$ schießt er sechs mal.

Damit lässt sich der Erwartungswert berechnen:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 6 \cdot \frac{1}{32} = \frac{63}{32} \approx 1.96875$$

A5. Für das nächste Schulfest wird eine Tombola vorbereitet. Unter den 2000 Losen sind 1600 Nieten, 200 Lose mit dem Gewinn von 5€ , 150 Lose mit dem Gewinn von 10€ und 50 Lose mit dem Gewinn von 20€ . Der Lospreis beträgt 2€ . Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn oder Verlust eines Loskäufers.

Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Zufallsgröße.

Lösung:

Der Erwaruntswert ist:

$$\mu = \frac{1}{2000}(-2 \cdot 1600 + 3 \cdot 200 + 8 \cdot 150 + 18 \cdot 50) = -\frac{500}{2000} = -\frac{1}{4}$$

Der Einfachheit halber wird zunächst die Varianz berechnet:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1600}{2000}(-2+\frac{1}{4})^2 + \frac{200}{2000}(3+\frac{1}{4})^2 + \frac{150}{2000}(8+\frac{1}{4})^2 + \frac{50}{2000}(18+\frac{1}{4})^2 \\ &= 2.45 + 1.05625 + 5.1046875 + 8.55625 \\ &= 17.1671875 \end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist damit:

$$\sigma = \sqrt{17.1671875} \approx 4.14$$

A6. 51.4% aller Neugeborenen sind Jungen. Eine Familie hat sechs Kinder.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X=Anzahl der Jungen in der Familie.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es genau drei Jungen und drei Mädchen sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Familie mindestens zwei Jungen hat?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Familie höchstens zwei Jungen hat?

Lösung:

Es handelt sich in jedem Fall um eine Binomialverteilung.

a) Es gilt:

$$\begin{array}{rcccl} P(X=0) & = & \binom{6}{0} \cdot 0.514^0 \cdot 0.486^6 & = & 0.0132 \\ P(X=1) & = & \binom{6}{1} \cdot 0.514^1 \cdot 0.486^5 & = & 0.0836 \\ P(X=2) & = & \binom{6}{2} \cdot 0.514^2 \cdot 0.486^4 & = & 0.2211 \\ P(X=3) & = & \binom{6}{3} \cdot 0.514^3 \cdot 0.486^3 & = & 0.3118 \\ P(X=4) & = & \binom{6}{4} \cdot 0.514^4 \cdot 0.486^2 & = & 0.2473 \\ P(X=5) & = & \binom{6}{5} \cdot 0.514^5 \cdot 0.486^1 & = & 0.1046 \\ P(X=6) & = & \binom{6}{6} \cdot 0.514^6 \cdot 0.486^0 & = & 0.0184 \end{array}$$

b) Es kann sofort abgelesen werden, dass $P(X=3) = 0.3118$. es sind also ca. 31%.

c) Hier handelt es sich um die Gegenwahrscheinlichkeit, dass kein oder nur ein Junge in der Familie lebt:

$$\begin{aligned} 1 - P(X=0) - P(X=1) &= 1 - 0.0132 - 0.0836 \\ &= 0.9032 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Jungen in der Familie leben beträgt ca. 90%.

d) Hier handelt es sich um die Summe der ersten drei Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) &= 0.0132 + 0.0836 + 0.2211 \\ &= 0.3179 \end{aligned}$$

Es sind also ungefähr 32%.

A7. **Knobelaufgabe!** Ein Glücksrad hat einen blauen, einen grünen, einen roten und einen weißen Sektor, die alle vier gleich groß sind. Man gewinnt nur, wenn man auf 'Rot' kommt. Wie oft muss man spielen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal auf 'Rot' kommt?

Tipp: Wähle als Zufallsvariable: X=Anzahl 'Rot'.

Lösung:

Wählt man die Zufallsvariable X=Anzahl von 'Rot', dann ist gesucht:

$$P(X \geq 1) \geq 0.95$$

Dafür gilt dann allerdings:

$$1 - P(X=0) \geq 0.95$$

Diese (Un)Gleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned} 1 - P(X=0) &= 0.95 \\ P(X=0) &= 0.05 \\ \binom{n}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^n &= 0.05 \\ n \cdot \log(0.75) &= \log(0.05) \\ n &= \frac{\log(0.05)}{\log(0.75)} \\ n &= 10.4133 \end{aligned}$$

Offenbar muss man mehr, also mindestens 11 mal spielen, bevor die Wahrscheinlichkeit für 'Rot' größer als 95% ist.