6. Semester Klausur 19.9.2022

Mathematik GK Cremer

Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 45 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme/Ermittle bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen (auch '**Zeige**').
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (2x+3)e^{2x}$$

a) Berechne alle Nullstellen dieser Funktion.
Lösung:
Es ist:

$$\begin{aligned} 0 &= (2x+3)e^{2x} \\ &= 2x+3 \\ -3 &= 2x \\ -1,5 = -\frac{3}{2} &= x \end{aligned}$$

b) Zeige rechnerisch, dass die erste Ableitungsfunktion der obigen Funktion

$$f'(x) = (4x+8)e^{2x}$$

ist.
Lösung:

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+3 \quad & u'(x) &= 2 \\ v(x) &= e^{2x} \quad & v'(x) &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

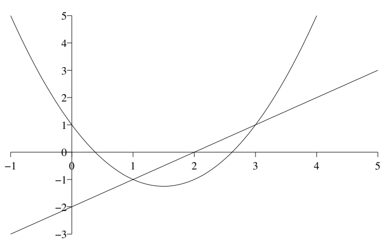
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot e^{2x} + (2x+3) \cdot 2e^{2x} \\ &= e^{2x}(2+4x+6) \\ &= (4x+8)e^{2x} \end{aligned}$$

Im weiteren darf ohne Nachweis verwendet werden:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (8x+20)e^{2x} \\ f'''(x) &= (16x+48)e^{2x} \end{aligned}$$

c) Berechne alle Extrem- und Wende**stellen** der Funktion $f(x)$.
Lösung:
Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Da weiterhin $f''(-2) = 4e^{-4} > 0$, liegt bei $x = -2$ ein Minumum vor.
Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle ($f''(x) = 0$) ergibt: $x = -2.5$
Da $f'''(-2.5) > 0$ liegt bei $x = -2,5$ eine Wendestelle vor.

A2. Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 3x + 1$ und $g(x) = x - 2$ schließen eine Fläche ein (Siehe Abbildung).



Berechne die Maßzahl dieser Fläche.
Lösung:
Zunächst müssen die Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmt werden, dazu wird $f(x) = g(x)$ gesetzt:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 1 &= x - 2 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 = 1 \vee \quad x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Somit kann die Fläche berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^3 f(x) - g(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_1^3 x^2 - 4x + 3\, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| \\ &= \left| 9 - 18 + 9 - (\frac{1}{3} - 2 + 3) \right| \\ &= \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

A3. Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne des Verktor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

A4. Setzt man zwei Geraden g_1 und g_2 gleich, ergibt sich ein unlösbares Gleichungssystem. Weiter sind die jeweils zugehörigen Richtungsvektoren: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Gib begründet an, wie die beiden Geraden zueinander liegen.
Lösung:
Da die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind, liegen die beiden Geraden parallel.

A5. Berechne die Lösungsmenge des Gleichungssystems. Im Falle einer unendlich großen Lösungsmenge muss dieses nicht explizit angegeben werden.

$$\begin{array}{rrcl} I & a + 2b + c & = & 5 \\ II & 2a - b + c & = & 3 \\ III & 5b + c & = & 7 \end{array}$$

Lösung:
Es ist:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

6. Semester Klausur 19.9.2022

Mathematik GK Cremer

Hilfsmittelteil

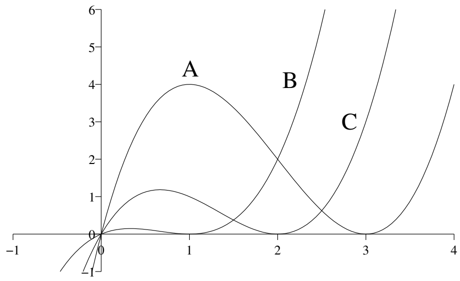
Bearbeitungszeit: 180 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme/Ermittle bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen (auch '**Zeige**').
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A6. Die Larven der grünen Florfliege, die sogenannten **Blattlauslöwen**, werden im ökologischen Landbau aus Schädlingsbekämpfung gegen Blattläuse eingesetzt.
Im Ökoinstitut 'Grüner Daumen' konnte man feststellen, dass das Fressverhalten dieser Blattlauslöwen, mit der Funktionsschar

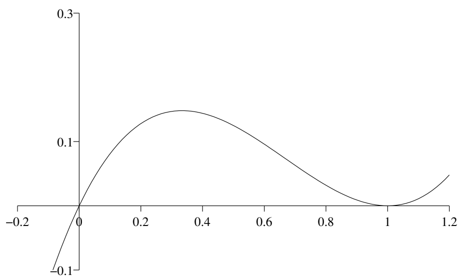
$$f_k(x) = x^3 - 2kx^2 + k^2x$$

modeliert werden kann (Durch Variation des Parameters k kann dabei auf die unterschiedlich großen Anfangspopulationen bei den Blattläusen reagiert werden). Die sich jeweils ergebende Funktion ist nur zwischen ihren Nullstellen sinnvoll betrachtbar. x gibt dabei die Stunden nach Beginn des Fressens und $f_k(x)$ gibt an, wieviel Tausend Blattläuse zu einem Zeitpunkt x pro Minute gefressen werden.
Für die Werte von $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ sind die entsprechenden Funktionsgraphen in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) In der obigen Abbildung werden die Funktionsgraphen mit A, B und C bezeichnet. Gib an, welcher Wert von k zu welchem der drei Funktionsgraphen gehört.
Lösung:
A:$k = 3$, B:$k = 1$, C:$k = 2$

b) Da die Verläufe der Funktionsgraphen prinzipiell immer gleich sind, soll ab hier $k = 1$ fest angenommen werden. Der Verlauf dieser Funktion ist in der folgenden Abbildung noch einmal dargestellt.



Weise rechnerisch nach, dass auch diese Funktion nur zwei Nullstellen hat und interpretiere die Bedeutung dieser Nullstellen im Sachzusammenhang.
Lösung:
Die Funktion $f_1(x)$ muss gleich Null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x^2 + x \\ &= x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x(x-1)^2 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, dass die Funktion nur die Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$ hat.
Bei der Nullstelle $x = 0$ beginnen die Blattlauslöwen zu fressen und bei $x = 1$ sind alle Blattläuse verspeist.

c) Bestimme den Zeitpunkt, an dem die meisten Blattläuse gefressen werden. Gib auch an, wieviele Tiere zu diesem Zeitpunkt pro Minute gefressen werden.

Lösung:
Hier ist nach dem Maximum der Funktion gefragt. Zur Bestimmung werden die Ableitungsfunktionen gebraucht.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 4 \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung lautet nun: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$.
Für $x = \frac{1}{3}$ ergibt sich: $f''(\frac{1}{3}) = -4$. Somit liegt bei $x = \frac{1}{3}$ ein Maximum vor.
Für $x = 1$ ergibt sich $f''(\frac{1}{3}) = 0$. Da aber etwa: $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$ und $f'(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} > 0$ liegt bei $x = 1$ ein Minimum vor (VWK).
Da nun weiterhin $f(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27} \approx 0.148$ werden nach 20 Minuten ca. 150 (148) Blattläuse pro Minute gefressen.

d) Bestimme den Zeitpunkt, an dem die Fresstätitigkeit der Blattlauslöwen am stärksten abnimmt.

Lösung:
Hier ist die Wendestelle gesucht. Eine solche kann bei der Nullstelle der zweiten Ableitung liegen. Diese ist $x = \frac{2}{3}$. Da weiterhin die dritte Ableitung immer ungleich Null ist, liegt bei $x = \frac{2}{3}$ eine Wendestelle vor.
Nach vierzig Minuten nimmt die Fresstätitigkeit am stärksten ab.

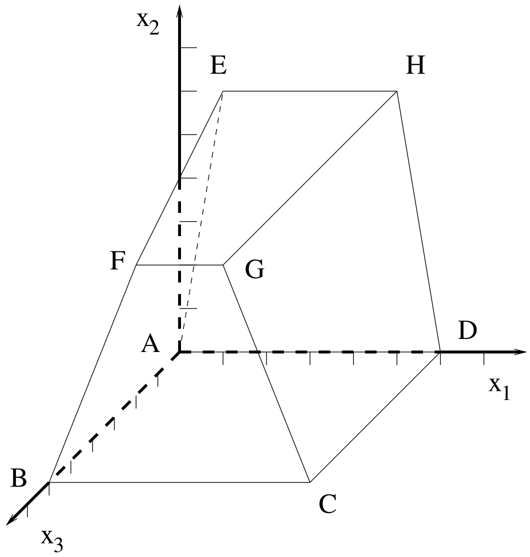
e) Der Graph der Funktion und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Berechne die Maßzahl dieser Fläche und interpretiere sie im Sachzusammenhang.

Lösung:
Aus der Berechnung der Nullstellen ergibt sich, dass die gesuchte Fläche zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegen muss. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Dieser Wert gibt die Gesamtzahl aller in dieser Stunde gefressenen Blattläuse an.

A7. Mit den Punkten A(0/0/0), B(0/0/6), C(6/0/6), D(6/0/0), sowie mit den Punkte E(1/6/0), F(2/5/5), G(4/5/5) und H(5/6/0) ist ein 'Klotz' festgelegt, wie er in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



a) Gib begründet an, ob die Vierecke ABCD und EFGH parallel sind oder nicht.
Lösung:
Da die x_2-Werte des 1. Vierecks alle Null sind, die x_2-Werte des 2. Vierecks aber die Werte 5 und 6 haben, können die Vierecke nicht parallel sein.

b)

(i) Durch die Punkte E und F verläuft eine Gerade g. Bestimme eine Parametergleichung dieser Geraden.

Eine mögliche Lösung ist: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} g : \vec{x} &= \vec{E} + r(\overrightarrow{F - E}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-6 \\ 5-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Durch die Punkte G und H verläuft die Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g und h schneiden sich in einem Punkt. Bestimme diesen Schnittpunkt.
Lösung:
Um den Schnittpunkt zu bestimmen, müssen die beiden Geradengleichungen gleich gesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $r = -1$ und $s = 2$. Setzt man $s = 2$ in h ein, erhält man mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

die Koordinaten des Schnittpunkts.

(iii) In der letzten Teilaufgabe wurde gezeigt, dass sich die Geraden g und h schneiden. Berechne die Größe des Schnittwinkels.

Lösung:

Der Schnittwinkel ist gleich dem Schnittwinkel der beiden Richtungsvektoren von g und h. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r_g} \cdot \vec{r_h} &= |\vec{r_g}||\vec{r_h}| \cos\alpha \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cos\alpha \\ 1 - 1 - 25 &= \sqrt{27}\sqrt{27}\cos\alpha \\ \frac{-25}{27} &= \cos\alpha \\ 157.81^\circ &\approx \alpha \end{aligned}$$

Da beim Schnittpunkt zweier Gerade immer der kleinere der beiden Schnittwinkel angegeben wird, beträgt der gesuchte Schnittwinkel:

$$\alpha \approx 22.19^\circ$$

c)

(i) Die Geraden von A nach B und die von A nach E schließen bei A einen Winkel ein. Zeige rechnerisch, dass es sich dabei um einen rechten Winkel handelt.

Lösung:

Das Skalarprodukt der entsprechenden Richtungsvektoren ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 6 \cdot 0 = 0$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Die Punkte A, B und E liegen in einer Ebene e. Gib eine Ebenengleichung dieser Ebene an.

Lösung:

Nimmt man den Ortsvektor zu A als Ortsvektor der Ebene und die Differenzvektoren zu B und E als Richtungsvektoren, dann ergibt sich die Ebenengleichung:

$$e : \vec{x} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Untersuche rechnerisch, ob das Viereck ABEF ein ebenes Viereck ist.

Lösung:

Hier muss untersucht werden, ob der Punkt F in der Ebene der letzten Teilaufgabe liegt, oder nicht. Der Ansatz:

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ergibt in seiner ersten Zeile $s = 2$ und in seiner zweiten Zeile $6s = 5 \Leftrightarrow s = \frac{5}{6}$. Somit ist das Gleichungssystem unlösbar.

Da der Punkt F nicht in der Ebene liegt, wie ABE, ist das Viereck ABEF nicht eben.

d) Das Viereck BCGF ist ein Trapez. Bestimme die Flächenmaßzahl dieses Trapezes, dabei dürfen die Seitenlängen von BC und FG den Angaben der Aufgabenstellung entnommen werden und brauchen nicht durch eine Rechnung begründet werden.

Lösung:

Die Seitenlänge von BC ist 6, die Seitenlaenge der Seite FG ist 2. Für die Höhe h des Trapezes ergibt sich:

$$h^2 = 1^2 + 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{26}$$

Somit ergibt sich für die Flächenmaßzahl des Trapezes:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2+6}{2}\sqrt{26} \\ &= 4\sqrt{26} \approx 20.4 \text{ FE} \end{aligned}$$