5. Semester 1. Klausur 2.11.2022

Mathematatik GK Cremer

Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 45 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme/Ermittle bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen (auch '**Zeige**').
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Berechne

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

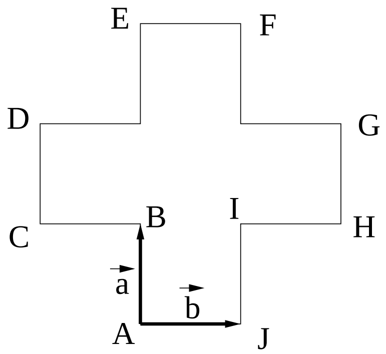
Lösung:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A2. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$.

Gib jeweils einen Wert für a an, so dass einmal die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind und dann, dass sie linear unabhängig sind.
Lösung:
$a = -6$, $a = 0$ (oder sonstiger Wert ungleich -6)

A3. Gegeben ist die folgende Figur in der alle Teilstrecken gleich lang und entweder parallel oder rechtwinklig zueinander sind.



Gib die Wegstrecken: 'A nach I', 'A nach F' und 'G nach C' mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.
Lösung:

$$\begin{aligned} \text{A nach I} \quad &= \vec{a} + \vec{b} \\ \text{A nach F} \quad &= 3\vec{a} + \vec{b} \\ \text{G nach C} \quad &= -\vec{a} - 3\vec{b} \end{aligned}$$

A4. Gegeben ist ddie Funktion

$$f(x) = x^2 - 6x$$

a) Gib das Symmetrieverhalten des Graphen (wenn möglich) an.
b) Gib an, wie sich der Graph 'im Unendlichen' verhält.
c) Berechne die Nullstellen der Funktion.

d) Berechne den einizgen Extrempunkt der Funktion und gib an, um welche Art von Extremum es sich handelt.

e) Der Graph der Funktion schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

Lösung:

a) Keine Symmetrie erkennbar.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

c) Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x \\ &= x(x-6) \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $x = 0$ und $x = 6$

d) Es ist

$$f'(x) = 2x - 6 \qquad f''(x) = 2$$

Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ führt zu dem Ergebnis $x = 3$.
Da $f''(3) = 2 > 0$ ist, muss es sich um eine **Minimum** handeln.
Weiterhin ist $f(3) = -9$ und damit liegt der Tiefpunkt bei $(3/-9)$.

e) Es ist

$$\int x^2 - 6x\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$$

Damit ergibt sich für die Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^6 x^2 - 6x\,dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^6 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}6^3 - 3\cdot 6^2 - 0 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}216 - 3\cdot 36 \right| \\ &= |72 - 108| = 36 \text{ FE} \end{aligned}$$

5. Semester 1. Klausur 2.11.2022

Mathematik GK Cremer

Hilfsmittelteil

Bearbeitungszeit: 135 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme/Ermittle bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen (auch '**Zeige**').
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

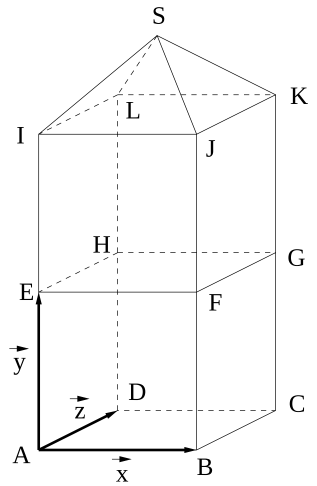
A5. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ y \end{pmatrix}$

Bestimme die Werte für x und y so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine geschlossene Vektorkette bilden, dass also

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Lösung:
$x = -5$ und $y = -5$

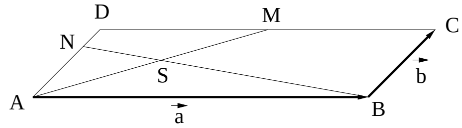
A6. Gegeben ist das folgende zweistöckige 'Haus'



Die Stockwerke sind dabei gleich hoch und das pyramidenförmige Dach ist halb so hoch, wie eine der Etagen.
Beschreibe mit den Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ die Wege von 'A nach K', 'E nach C', 'I nach G' und 'F nach S'.
Lösung:

$$\begin{aligned} \text{A nach K} &= \vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z} \\ \text{E nach C} &= -\vec{y} + \vec{x} + \vec{z} \\ \text{I nach G} &= -\vec{y} + \vec{x} + \vec{z} \\ \text{F nach S} &= \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} \end{aligned}$$

A7. Gegeben ist das folgende Parallelogramm mit den Eckpunkte A, B, C und D.



Der Punkt M teilt die Strecke $\overline{CD}$ genau in der Hälfte. Die Strecke $\overline{AN}$ ist genau $\frac{3}{4}$-mal so lang, wie die Strecke $\overline{AD}$.

Berechne in welchem Verhältnis der Punkt S die Strecke $\overline{BN}$ teilt.

Lösung:

Der geschlossene Vektorzug $\overline{ABSA}$ lässt sich mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{a} + r(-\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}) + s(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})\\ &= \vec{a} - r\vec{a} + \frac{3}{4}r\vec{b} - \frac{1}{2}s\vec{a} - s\vec{b}\\ &= \vec{a} - r\vec{a} - \frac{1}{2}s\vec{a} + \frac{3}{4}r\vec{b} - s\vec{b}\\ &= (1 - r - \frac{1}{2}s)\vec{a} + (\frac{3}{4}r - s)\vec{b}\end{aligned}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, muss sein:

$$\begin{aligned}1 - r - \frac{1}{2}s &= 0\\ \frac{3}{4}r - s &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 - r - \frac{1}{2}s &= 0\\ s &= \frac{3}{4}r\end{aligned}$$

Setzt man $s = \frac{3}{4}r$ in die erste Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned}1 - r - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}r &= 0\\ -\frac{11}{8}r &= -1\\ r &= \frac{8}{11}\end{aligned}$$

Daher teilt der Punkt S die Strecke $\overline{BN}$ im Verhältnis 8:3.

A8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

a) Bestimme alle Nullstellen der Funktion.
b) Berechne (**!**) alle Extremstellen der Funktion.
c) Bestimme alle Wendepunkte des Funktionsgraphen.
d) Der Graph der Funktion schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimme den Inhalt dieser Fläche.

Lösung:

a) Es ist:

$$\begin{aligned}0 &= x^3 - 2x^2 + x\\ x = 0 &\quad x = 1\end{aligned}$$

b) Die Ableitungen der Funktion sind:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1\\ f''(x) &= 6x - 4\end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle $f'(x) = 0$ liefert die möglichen Extremstellen: $x = 1$ und $x = \frac{1}{3}$.
Weiterhin gilt: $f''(1) = 6 - 4 = 2$, so daß bei $x = 1$ ein Minumum liegt. Der Tiefpunkt ist $TP(1/0)$.
$f''(\frac{1}{3}) = 2 - 4 = -2$, so dass bei $x = \frac{1}{3}$ ein Maximum liegen muss. Da $f(\frac{1}{3}) \approx 0.15$ liegt der Hochpunkt bei $(0.33/0.15)$.

c) Die notwendige Bedingung ergibt, dass nur bei $x = \frac{2}{3}$ eine Wendestelle liegen kann. Da $f'''(x)$ immer ungleich Null ist, liegt dort auch tatsaechlich eine.
Weiterhin gilt $f(\frac{2}{3}) \approx 0.07$ und damit liegt der Wendepunkt bei $WP(0.67/0.07)$.

d) Hier gilt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{12} \approx 0.08$$

A9. Zwischen den Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 15 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x + 3$$

liegen Flächen. Bestimme die Summe aller Flächeninhalte dieser Flächen.
Tipp: Verwende zur Brechnung der Integrationsgrenzen den GTR!
Lösung:
Setzt man die beiden Funktionen gleich, ergibt sich, dass die Graphen sich bei $x = 1$, $x = 3$ und $x = 6$ schneiden. Daher ist die gesuchte Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^3 f(x) - g(x)\,dx \right| + \left| \int_3^6 f(x) - g(x)\,dx \right| \\ &= \left| \frac{16}{3} \right| + \left| -\frac{63}{4} \right| \\ &= \frac{253}{12} \approx 21.08 \text{ FE} \end{aligned}$$

A10. Eine Funktion $g(x)$ gibt die jeweilige Momentangeschwindigkeit eines Fahrzeugs zu einem Zeitpunkt x an.
Beschreibe, welche Bedeutung unter diesen Umständen die Zahl

$$\int_0^3 g(x)\,dx$$

hat.
Lösung:
Es ist die in den Stunde 0 bis 3 zurück gelegte Entfernung.

A11. Der Zu- oder Abfluss in oder aus einer Talsperre wird durch die Funktion

$$f(x) = 100x^3 - 1500x^2 + 5000x$$

modelliert, wobei $f(x)$ einen Zufluss in m^3/h angibt, wenn $f(x) > 0$ ist, sonst einen Abfluss. x gibt die Stunden nach Beginn der Beobachtung an.

a) Gib an, in welchen Zeiträumen Wasser in die Talsperre hinein fließt und in welchen Wasser heraus fließt.
b) Begründe, wieso sich für die Beschreibung der Situation die Funktion für x-Werte oberhalb von 10 nicht mehr eignet.
c) Zu Beginn der Beobachtung sind 5 Millionen m^3 Wasser in der Talsperre.
Bestimme, wieviel Wasser sich 6 Stunden nach Beginn der Beobachtung in der Talsperre befindet.

Lösung:

a) In den ersten 5 Stunden fließt Wasser in die Talsperre hinein, dann für fünf Stunden fließt Wasser hinaus.
b) Dann strebt $f(x)$ gegen positivunendlich, was bedeuten würde, dass immer mehr Wasser in die Talsperre läuft.
c) Zum Anfangswert muss das Integral zwischen 0 und 6 addiert werden:

$$\begin{aligned} 5000000 + \int_0^6 f(x)\,dx &= 5000000 + 14400 \\ &= 5014400 \end{aligned}$$

Es befinden sich 5014400 m^3 Wasser in der Talsperre.