OIII 2.Klassenarbeit 23.12.2004

Lösungen als PDF-Datei unter: http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/9/9index.html

A1. Gib an, um welche Art von Parabel es sich bei dem Funktionsgraphen der folgenden Funktionen handelt (Normalparabel, gestreckte/gestauchte Parabel, nach oben/unten geöffnet)

a)	$f(x) = -x^2 + 3x - 7$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$
c)	$f(x) = -2x^2 + 3x - 5$	d)	$f(x) = -0,17x^2 + 2,21x - 3,43$

Lösung:

a) Nach unten geöffnete Normalparabel.

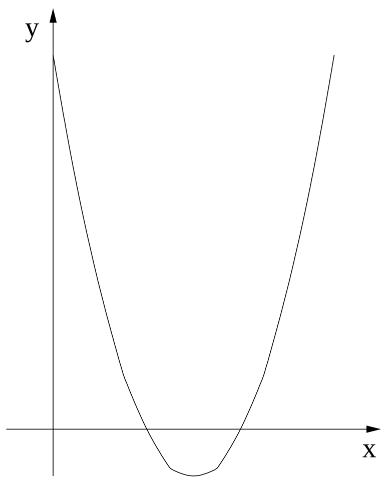
b) Gestauchte, nach oben geöffnete Parabel.

c) Gestreckte, nach unten geöffnete Parabel.

d) Gestauchte, nach unten geöffnete Parabel.

A2. Zeichne die Parabel zu $f(x) = x^2 - 6x + 8$ für die x-Werte von 0 bis 6 in ein Koordinatensytem.

Lösung:



A3. Bestimme von den folgenden Parabeln jeweils den Scheitelpunkt und die Nullstellen (so vorhanden).

a)	$y = -x^2 + 3x$	b)	$y = 2x^2 - 12x + 10$
c)	$y = -4x^2 + 18x - 8$	d)	$y = 3x^2 + 18x + 30$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} y &= -1[x^2 - 3x] \\ &= -1[x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] \\ &= -1[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] \\ &= -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow SP(\frac{3}{2}/\frac{9}{4}) \\ 0 &= x^2 + 3x \\ &= x(x+3) \Rightarrow x = 0 \vee x = -3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y &= 2[x^2 - 6x + 5] \\ &= 2[x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 5] \\ &= 2[(x-3)^2 - 4] \\ &= 2(x-3)^2 - 8 \Rightarrow SP(3/-8) \\ 0 &= (x-3)^2 - 2^2 \\ &= (x-5)(x-1) \Rightarrow x = 5 \vee x = 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y &= -4[x^2 - \frac{9}{2}x + 2] \\ &= -4[x^2 - \frac{9}{2}x + (\frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16} + \frac{32}{16}] \\ &= -4[(x - \frac{9}{4})^2 - \frac{49}{16}] \\ &= -4(x - \frac{9}{4})^2 + \frac{49}{4} \Rightarrow SP(\frac{9}{4}/\frac{49}{4}) \\ 0 &= (x - \frac{9}{4})^2 - (\frac{7}{4})^2 \\ &= (x-4)(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow x = 4 \vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y &= 3[x^2 + 6x + 10] \\ &= 3[x^2 + 6x + 3^2 - 9 + 10] \\ &= 3[(x+3)^2 + 1] \\ &= 3(x+3)^2 + 3 \Rightarrow SP(-3/3) \\ 0 &= (x+3)^2 + 1 \Rightarrow \text{ Keine Nullstellen} \end{aligned}$$

A4. Ein Handwerker kauft für 60,00€ Schrauben. Ein anderes Mal erhält er für den gleichen Betrag 100 Schrauben mehr, was bedeutet, daß jede Schraube um 10ct preiswerter war, als beim ersten Mal. Wieviele Schrauben kaufte er beim ersten Mal?

Lösung:

Gesucht ist die Anzahl der Schrauben beim ersten Einkauf. Sei p der Preis einer Schraube beim ersten Einkauf in Cent.

$$\begin{aligned} \frac{6000}{p} &= \frac{6000}{p-10} - 100 \\ 6000(p-10) &= 6000p - 100p(p-10) \\ 6000p - 60000 &= 6000p - 100p^2 + 1000p \\ 100p^2 - 1000p - 60000 &= 0 \\ p^2 - 10p - 600 &= 0 \\ p^2 - 10p + 5^2 - 25 - 600 &= 0 \\ (p-5)^2 - 25^2 &= 0 \\ (p-30)(p+20) &= 0 \\ p = 30 &\vee p = -20 \end{aligned}$$

Da ein negativer Preis zwar sehr schön wäre, aber wohl leider unrealistisch ist, dürfte eine Schraube 30ct gekostet haben. Er erhielt daher $\frac{6000}{30} = 200$ Schrauben.

A5. Zwei Pumpen befüllen einen Behälter in 18 Minuten mit Wasser. Wenn die Pumpen einzeln arbeiten, dann braucht die eine 15 Minuten länger, als die andere. Wie lange brauchen die Pumpen alleine, um den Behälter zu füllen?

Lösung:

Gesucht sind die Füllzeiten der beiden Pumpen. Sei die Zeit der einen p, die andere ist dann $p+15$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+15} &= \frac{1}{18} \\ 18(p+15) + 18p &= p(p+15) \\ 18p + 270 + 18p &= p^2 + 15p \\ 0 &= p^2 - 21p - 270 \\ 0 &= p^2 - 21p + (\frac{21}{2})^2 - \frac{441}{4} - \frac{1080}{4} \\ 0 &= (p - \frac{21}{2})^2 - (\frac{39}{2})^2 \\ 0 &= (p-30)(p+9) \\ p = 30 &\vee p = -9 \end{aligned}$$

Die negative Füllzeit kann getrost vergessen werden, daher brauchen die Pumpen 30, bzw. 45 Minuten, wenn sie den Behälter alleine füllen sollen.

A6. Bei einem Rückenwind von 24km/h braucht ein Flugzeug für die Strecke Köln — Berlin (480km) 300 Sekunden weniger, als bei Windstille. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs.

Lösung:

Gesucht ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs, diese sei v. Die Zeitdifferenz beträgt $\frac{1}{12}$ Stunden.

$$\begin{aligned}
\frac{480}{v} &= \frac{480}{v+24} + \frac{1}{12} \\
480(v+24)\cdot 12 &= 12v\cdot 480 + v(v+24) \\
5760v + 138240 &= 5760v + v^2 + 24v \\
0 &= v^2 + 24v - 138240 \\
0 &= v^2 + 24v + 12^2 - 144 - 138240 \\
0 &= (v+12)^2 - 372^2 \\
0 &= (v+384)(v-360) \\
v = -382 &\vee v = 360
\end{aligned}$$

Da nicht anzunehmen ist, daß das Flugzeug rückwärts fliegt, hat es eine Eigengeschwindigkeit von 360km/h.

A7. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & \sqrt{2x+3} = \sqrt{4x-3} & \text{b)} & \sqrt{7x+9} = x+3 \\
\text{c)} & \sqrt{5x+15} - 1 = \sqrt{9x-2} & &
\end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \sqrt{2x+3} &= \sqrt{4x-3} \\
\Rightarrow 2x+3 &= 4x-3 \\
6 &= 2x \\
3 &= x \\
\text{Probe: } \sqrt{2\cdot 3+3} &= \sqrt{4\cdot 3-3} \\
\sqrt{9} &= \sqrt{9} \\
\mathbb{L} &= \{3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad \sqrt{7x+9} &= x+3 \\
\Rightarrow 7x+9 &= x^2 + 6x + 9 \\
0 &= x^2 - x \\
0 &= x(x-1) \\
x &= 0/veex = 1 \\
\text{Probe 0: } \sqrt{7\cdot 0+9} &= 0+3 \\
3 &= 3 \\
\text{Probe 1: } \sqrt{7+9} &= 1+3 \\
4 &= 4 \\
\mathbb{L} &= \{0;1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{c)} \qquad \sqrt{5x+15}-1 &= \sqrt{9x-2} \\
\Rightarrow 5x+15-2\sqrt{5x+15}+1 &= 9x-2 \\
18-4x &= 2\sqrt{5x+15} \\
9-2x &= \sqrt{5x+15} \\
81-36x+4x^2 &= 5x+15 \\
4x^2-41x+66 &= 0 \\
x^2-\frac{41}{4}x+\frac{33}{2} &= 0 \\
x^2-\frac{41}{4}x+(\frac{41}{8})^2-\frac{1681}{64}+\frac{1056}{64} &= 0 \\
(x-\frac{41}{8})^2-\frac{625}{64} &= 0 \\
(x-\frac{41}{8})^2-(\frac{25}{8})^2 &= 0 \\
(x-\frac{33}{4})(x-2) &= 0 \\
x &= \frac{33}{4}/veex=2 \\
\text{Probe } \tfrac{33}{4}\text{:} \ \sqrt{\frac{165+60}{4}}-1 &= \sqrt{\frac{297-8}{4}} \\
\sqrt{\frac{225}{4}}-1 &= \sqrt{\frac{281}{4}} \\
6,5 &= 8,381 \\
\text{Probe 2:} \ \sqrt{5\cdot 2+15}-1 &= \sqrt{9\cdot 2-2} \\
\sqrt{25}-1 &= \sqrt{18-2} \\
5-1 &= 4 \\
\mathbb{L} &= \{2\}
\end{aligned}
$$