9a 1.Klassenarbeit 23.9.2009

A1. Gib an, um welche Art von Parabel es sich handelt, die von den folgenden Gleichungen beschrieben werden und bestimme, ob sie nach oben oder unten geöffnet sind.

a) $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}$ b) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 1{,}7)(x + 2{,}3)$ c) $f(x) = \sqrt{2}(x - \sqrt{3})^2 + \sqrt{13}$

Lösung:

a) nach unten geöffnet, gestreckt.
b) nach oben geöffnet, gestaucht.
c) nach oben geöffnet, gestreckt.

A2. Bestimme von den Parabeln, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind, jeweils den Scheitelpunkt.

a) $2x^2 + 5 = y + 4x$ b) $3x^2 - 2{,}4x = y - 0{,}78$

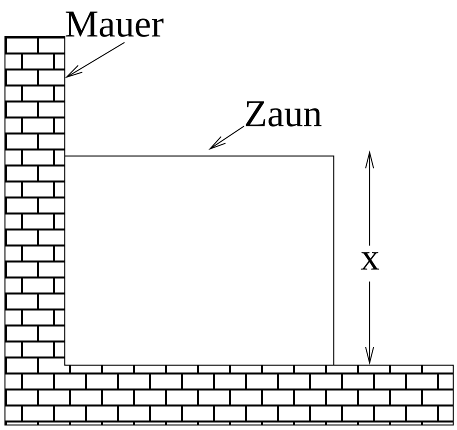
Lösung:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & 2x^2 + 5 & = & y + 4x \\
\Leftrightarrow & 2x^2 - 4x + 5 & = & y \\
\Leftrightarrow & 2[x^2 - 2x + \frac{5}{2}] & = & y \\
\Leftrightarrow & 2[x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}] & = & y \\
\Leftrightarrow & 2[(x-1)^2 + \frac{3}{2}] & = & y \\
\Leftrightarrow & 2(x-1)^2 + 3 & = & y \\
 & SP(1/3) & & \\
\text{b)} & 3x^2 - 2,4x & = & y - 0,78 \\
\Leftrightarrow & 3x^2 - 2{,}4x + 0,78 & = & y \\
\Leftrightarrow & 3[x^2 - 0.8x + 0.26] & = & y \\
\Leftrightarrow & 3[x^2 - 0.8x + 0.4^2 - 0.16 + 0.26] & = & y \\
\Leftrightarrow & 3[(x-0.4)^2 + 0.1] & = & y \\
\Leftrightarrow & 3(x-0.4)^2 + 0.3 & = & y \\
 & SP(0.4/0.3) & &
\end{array}
$$

A3. Mit einem zehn Meter langen Stück Zaun soll in einer Ecke eines Gartens eine Ecke abgetrennt werden (Siehe Skizze). Zeige, dass die Formel für die Fläche

$$A = 10x - x^2$$

ist und bestimme zu dieser Parabel den Scheitelpunkt.
Welche Bedeutung haben die Koordinaten des Scheitelpunkts in diesem Sachzusammenhang?



Lösung:
Da die eine Seite der Ecke x Meter lang sein soll und der Zaun insgesamt 10m lang ist, ist das andere Stück $10 - x$ Meter lang. Die Fläche ist daher:

$$\begin{aligned} A &= x(10 - x) \\ &= 10x - x^2 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{array}{rcl} A & = & -x^2+10x \\ \Leftrightarrow & = & -[x^2-10x] \\ \Leftrightarrow & = & -[x^2-10x+5^2-25] \\ \Leftrightarrow & = & -[(x-5)^2-25] \\ \Leftrightarrow & = & -(x-5)^2+25 \end{array}$$

Der Scheitelpunkt liegt also bei $SP(5/25)$. Dabei gibt der x-Wert (5) an, wie lang die eine Seite sein muss, damit die Fläche maximal wird. Diese maximale Fläche ist 25m^2.

A4. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen.

$$\text{a)} \quad 2x^2-\sqrt{2}x = x^2-3x \qquad \text{b)} \quad 3x = \tfrac{x^2}{2}+\tfrac{5}{2}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & 2x^2-\sqrt{2}x & = & x^2-3x \\ \Leftrightarrow & x^2+\sqrt{2}x+3x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2-(\sqrt{2}-3)x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x[x-(\sqrt{2}-3)] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x=0 & \vee & x-(\sqrt{2}-3)=0 \\ \Leftrightarrow & x=0 & \vee & x=\sqrt{2}+3 \\ & \mathbb{L} & = & \{0;\sqrt{2}+3\} \\ & \mathbb{L} & = & \{0;4.41\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{b)} & 3x & = & \frac{x^2}{2}+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & 6x & = & x^2+5 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x^2-6x+5 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x^2-6x+3^2-9+5 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (x-3)^2-4 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (x-3)^2-2^2 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (x-3+2)(x-3-2) \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (x-1)(x-5) \\ \Leftrightarrow & x-1=0 & = & x-5=0 \\ \Leftrightarrow & x=1 & \vee & x=5 \\ & \mathbb{L} & = & \{1;5\} \end{array}$$

A5. Bei einem Dreieck, das den Flächeninhalt 24cm^2 hat, ist die Höhe um 8cm länger als die Grundseite. Wie lang ist die Höhe und die Grundseite?

Lösung:

Die Grundseite habe die Länge g:

$$\begin{array}{lrcl} & 24 & = & \frac{1}{2}g(g+8) \\ \Leftrightarrow & 48 & = & g^2+8g \\ \Leftrightarrow & 0 & = & g^2+8g-48 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & g^2+8g+4^2-16-48 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (g+4)^2-64 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (g+4)^2-8^2 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (g+4+8)(g+4-8) \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (g+12)(g-4) \\ \Leftrightarrow & g+12=0 & \vee & g-4=0 \\ \Leftrightarrow & g=-12 & \vee & g=4 \end{array}$$

Da eine Länge nicht negativ sein kann, ist die Grundseite 4cm lang und die Höhe daher 12cm.

A1. Bestimme um was für eine Art von Parabel es sich handelt und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.

a) $f(x) = 0.32x + 1.01x^2 - 21.12$ b) $f(x) = (2 - 0.3x)(x+4)\cdot 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{7})^2 - \sqrt{12}$

Lösung:

a) nach oben geöffnet, gestreckt
b) nach unten geöffnet, gestaucht
c) nach oben geöffnet, normal.

A2. Bestimme von den folgenden Parabeln den Scheitelpunkt:

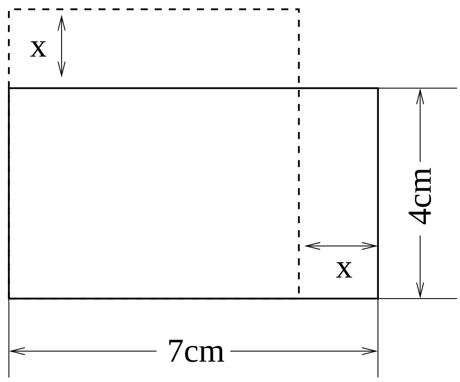
a) $48 + 2y = 2x(x+5)$ b) $9x + 3y = x^2 + 12$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & 48 + 2y &=& 2x(x+5) \\
\Leftrightarrow & 24 + y &=& x(x+5) \\
\Leftrightarrow & y &=& x^2 + 5x - 24 \\
\Leftrightarrow & y &=& x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 24 \\
\Leftrightarrow & y &=& (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{121}{4} \\
& SP(-\frac{5}{2}/-\frac{121}{4}) && SP(-2.5/-30.25)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{b)} & 9x + 3y &=& x^2 + 12 \\
\Leftrightarrow & 3x + y &=& \frac{1}{3}x^2 + 4 \\
\Leftrightarrow & y &=& \frac{1}{3}x^2 - 3x + 4 \\
\Leftrightarrow & y &=& \frac{1}{3}[x^2 - 9x + 12] \\
\Leftrightarrow & y &=& \frac{1}{3}[x^2 - 9x + 4.5^2 - 4.5^2 + 12] \\
\Leftrightarrow & y &=& \frac{1}{3}[(x - 4.5)^2 - 8.25] \\
\Leftrightarrow & y &=& \frac{1}{3}(x - 4.5)^2 - 2.75 \\
& SP(4.5/-2.75) &&
\end{array}$$

A3. Bei einem Rechteck mit den Seitenlängen von 4 und 7cm wird die eine Seite um $x$cm gekürzt und die andere um $x$cm verlängert.



a) Gib die Formel für die Fläche als Funktion von x an.
b) Für welches x wird die Fläche maximal und wie groß ist sie dann?

Lösung:

a) Die Formel für die Fläche ist:

$$A = (7 - x)(4 + x) = -x^2 + 3x + 28$$

b) Hier muss zunächst die Scheitelform der Parabelgleichung bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
A &= -x^2 + 3x + 28 \\
&= -[x^2 - 3x - 28] \\
&= -[x^2 - 3x + 1.5^2 - 1.5^2 - 28] \\
&= -[(x - 1.5)^2 - 30.25] \\
&= -(x - 1.5)^2 + 30.25
\end{aligned}$$

Somit wird die Fläche bei $x = 1.5$cm am größten. Sie beträgt dann 30.35cm^2.

A4. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$\text{a)}\quad 2x^2 - \sqrt{5}x = 3x + x^2 \qquad \text{b)}\quad 2x^2 + 40x + 15 = 16x - 6 - x^2$$

Lösung:

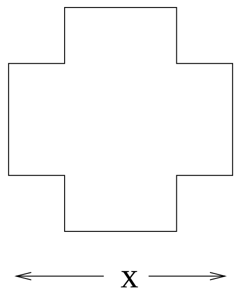
$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & 2x^2 - \sqrt{5}x & = & 3x + x^2 \\
\Leftrightarrow & x^2 - \sqrt{5}x - 3x & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x(x - \sqrt{5} - 3) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0 & \vee & x - \sqrt{5} - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0 & \vee & x = \sqrt{5} + 3 \\
 & \mathbb{L} & = & \{0; \sqrt{5} + 3\} = \{0; 5.24\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{b)} & 2x^2 + 40x + 15 & = & 16x - 6 - x^2 \\
\Leftrightarrow & 3x^2 + 24x + 21 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 8x + 7 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 8x + 4^2 - 16 + 7 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (x + 4)^2 - 3^2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (x + 4 + 3)(x + 4 - 3) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (x + 7)(x + 1) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x + 7 = 0 & \vee & x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & x = -7 & \vee & x = -1 \\
 & \mathbb{L} & = & \{-7; -1\}
\end{array}$$

A5. Aus quadratischen Blechplatten sollen Quader mit einem Fassungsvermögen von $1125\ \text{dm}^3$ hergestellt werden. Dazu ird an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge 5dm ausgestanzt. Die abstehenden Rechtecke können dann hochgebogen und verschweißt werden. Berechne die Seitenlänge der ursprünglichen Blechplatten.

Lösung:

Man kann sich die Platten folgendermaßen vorstellen:



Damit ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
5 \cdot (x - 10)^2 &= 1125 \\
(x - 10)^2 - 225 &= 0 \\
(x - 10)^2 - 15^2 &= 0 \\
(x - 10 + 15)(x - 10 - 15) &= 0 \\
(x + 5)(x - 25) &= 0 \\
x &= -5 \vee x = 25
\end{aligned}$$

Da eine negative Länge nicht vorkommen kann, müssen die Platten eine Seitenlänge von 25dm haben.