Lineare Gleichungssysteme
(LGS)

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Treten in irgendeinem Zusammenhang[1] mehrere Gleichungen auf, dann sind diese Gleichungen in der Regel unabhängig. Das Wort 'unabhängig' bedeutet in diesem Zusammenhang, dass gleichnamige Variablen in unterschiedlichen Gleichungen auch unterschiedliche Werte annehmen können, um die Gleichung in eine wahre Aussage zu überführen.
Beispiel:

$$x + 3 = 5 \qquad x - 7 = 2$$

Bei der linken Gleichung führt die Ersetzung der Variablen x durch die Zahl 2 zu der (wahren) Aussage: $2 + 3 = 5$, während bei der linken Gleichung die ebenfalls x genannte Variable den Wert 9 annehmen muss, damit eine wahre Aussage $(9 - 7 = 2)$ entsteht.
Nun gibt es aber auch Situationen, bei denen eine gleich benannte Variable in mehreren Gleichungen dieselbe Bedeutung haben soll. Wenn etwa in der ersten Gleichung die Variable x den Wert 5 haben soll, dann soll auch in einer zweiten Gleichung der Wert der Variablen x den Wert 5 haben. In diesem Sinne sind also solche Gleichungen 'abhängig'.
Um zu kennzeichnen, dass es sich um zusammen gehörige Gleichungen handelt, hat es sich eingebürgert diese Gleichungen mit römischen Zahlen zu numerieren:

$$\begin{array}{lrcl} I & 2x - y & = & 0 \\ II & x + 2y & + & 5 \end{array}$$

Bei solchen LGS ist es im Normalfall so, dass jede Gleichung mehrere Variablen enthält (im obigen Beispie x und y), was allerdings nicht unbedingt der Fall sein muss.
Schon in der Mittelstufe werden LGS behandelt und es werden Lösungsverfahren angeboten (meistens: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren). Hierbei handelt es sich allerdings in der Regel um Gleichungssysteme, bei denen die Anzahl der Variablen gleich der Anzahl der Gleichungen ist, was ebenfalls nicht unbedingt der Fall sein muss[2].
In diesem Text soll ein allgemeinerer Blick auf LGS gesucht werden und die unterschiedlichen Möglichkeiten ausführlich vorgestellt werden. Als einziges Lösungsverfahren wird dabei der sogenannte 'Gauß-Algorithmus' vorgestellt und angewendet.

Der Gauß-Algorithmus

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Schritte beschrieben, mit denen man mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung eines LGS bestimmen kann. Zur besseren Verdeutlichung soll, parallel zu den Erklärungen, auch sofort ein Gleichungssystem mit diesem Algorithmus gelöst werden:

$$\begin{array}{crcr} I & 3x + y - 2z & = & -1 \\ II & 2x + 2y & = & 2 \\ III & 5x - 3y + 2z & = & 9 \end{array}$$

Der erste Schritt des Gauß-Verfahrens[3] besteht darin das Gleichungssystem in die sogenannte 'Matrixschreibweise' zu bringen. Dazu ist es sinnvoll das Gleichungssystem so zu schreiben, dass zum einen alle Variablen gleichen Namens (und ihrer Vorfaktoren) senkrecht übereinander stehen, und weiterhin alle Variablen auch mit ihrer Vielfachheit angegeben werden, auch wenn das normalerweise nicht üblich ist. Obiges LGS sähe damit so aus:

---
[1] Zum Beispiel eine Mathematikarbeit.

[2] Ein LGS, das mehr Gleichungen als Variablen enthält wird auch 'überbestimmt', eines, das weniger Gleichungen als Variablen enthät 'unterbestimmt' genant.

[3] So wird der Gauß-Algorithmus mitunter auch genannt.

$$
\begin{array}{lccccc}
I & 3x & +1y & -2z & = & -1 \\
II & 2x & +2y & +0z & = & 2 \\
III & 5x & -3y & +2z & = & 9
\end{array}
$$

Man beachte in der ersten Zeile die Angabe von '$1y$' und in der zweiten Zeile die Angabe: '$0z$'.
Nun werden alle Angaben weggelassen, die 'nicht nötig' sind, weil sie sich aus dem Zusammenhang von alleine ergeben. Das sind zum einen die Variablen selber, da diese nun durch ihre Position klar festgelegt sind (im Beispiel: links die xe, dann die y und schließlich die z). Weiterhin muss auch das Gleichheitszeichen nicht angegeben werden und die Vorzeichen sind nur da nötig, wo es sich um ein Minuszeichen handelt. Auch die römische Numerierung ist nicht erforderlich, da sie nur dazu dient anzuzeigen, dass es sich um ein LGS handelt. Die Matrixschreibweise sieht dann folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{cccc}
3 & 1 & -2 & -1 \\
2 & 2 & 0 & 2 \\
5 & -3 & 2 & 9
\end{array}
$$

Im praktischen Umgang erweist es sich oft als sinnvoll die Spalten, welche die Variablen beschreiben von der Spalte, die für die einfachen Zahlen steht durch einen senkrechten Strich abzutrennen und unter das Gleichungssystem noch einen waagerechten Strich zu ziehen[4]:

$$
\begin{array}{ccc|c}
3 & 1 & -2 & -1 \\
2 & 2 & 0 & 2 \\
5 & -3 & 2 & 9 \\
\hline
\end{array}
$$

Operationen

Nun müssen zwei Dinge unterschieden werden: Zum einen, welche Operationen für das LGS erlaubt sind und zum anderen, welches Ziel mit diesen Operationen verfolgt werden soll. Erlaubte Operationen sind:

1. Zeilen dürfen beliebig vertauscht werden.
2. Zeilen dürfen mit allen Zahlen außer der Null multipliziert werden. Das schließt die Division einer Zeile durch eine Zahl ein, weil etwa die Division durch 3 auch durch Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ erfolgen kann[5].
3. Zeilen dürfen addiert werden.

Diese erlaubten Operatoren dürfen auch kombiniert angewendet werden. Statt etwa die erste Zeile zunächst mit 2 zu multiplizieren, dann diese geänderte erste Zeile zur zweiten Zeile zu addieren, um abschließend die (neue) erste Zeile wieder mit $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren, um wieder die ursprüngliche erste Zeile zu erhalten, kann auch einfach das Doppelte der ersten zur zweiten Zeile addiert werden.

Ziel

Ziel der Operationen ist es eine Matrix zu erhalten, bei der auf der Diagonalen von 'oben links' nach 'unten rechts' nur 1en stehen und darunter nur Nullen. Für das obige LGS sähe das etwa so aus[6]:

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & ? & ? & ? \\
0 & 1 & ? & ? \\
0 & 0 & 1 & ? \\
\hline
\end{array}
$$

Es soll hier schon darauf hingewiesen werden, dass dieses Ziel nicht bei allen LGS erreicht werden kann, aber dazu später mehr.
Um das Ziel zu erreichen beginnt man immer 'oben links'. Dort soll eine '1' erscheinen. Das könnte folgendermaßen aussehen:

[4] Letzteres ist besonders dann von Interesse, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Variablen ist.

[5] Hier werden Kenntnisse der Bruchrechnung vorausgesetzt — Falls nicht: Gehe zurück in die Klasse 6, gehe nicht über LOS, ziehe nicht Euro. . .

[6] Die tatsächlichen Werte, die hier noch nicht näher spezifiziert sind, werden durch Fragezeichen dargestellt.

3	1	-2	-1	
2	2	0	2	: 2
5	-3	2	9	
3	1	-2	-1	Tausch mit II
1	1	0	1	Tausch mit I
5	-3	2	9	
1	1	0	1	
3	1	-2	-1	
5	-3	2	9	

Es gibt auch andere Möglichkeiten dieses (Teil)Ziel zu erreichen. So hätte man auch einfach die erste Zeile mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren können, was aber zu Brüchen in der Rechnung geführt hätte — wers mag! Normalerweise bekommt man recht schnell ein Gespür dafür, welche Operationen sich am besten eignen.
Nachdem nun 'oben links' die '1' steht, muss man dafür sorgen, dass unter dieser '1' nur noch Nullen stehen. Das geschieht dadurch, dass man die entsprechende Vielfacheit der ersten Zeile von den Folgezeilen subtrahiert:

1	1	0	1	
3	1	-2	-1	$-3{\cdot}$I
5	-3	2	9	$-5{\cdot}$I
1	1	0	1	
0	-2	-2	-4	
0	-8	2	4	

Die erste Zeile und die erste Spalte haben nun schon das Aussehen, das oben im Ziel gefordert wurde und brauchen im Weiteren nicht mehr berücksichtigt zu werden. Man schreibt die erste Zeile und erste Spalte zwar auch weiterhin mit ab, aber weiter gerechnet wird mit der Matrix, die entstehen würde, wenn man die erste Zeile und erste Spalte einfach streicht. Mit dieser 'verkleinerten' Matrix macht man genau so weiter, wie man bisher gearbeitet hat, also: Erst 'oben links' die '1' und dann darunter die Nullen. Das Ganze sieht dann so aus:

1	1	0	1	
0	-2	-2	-4	: (-2)
0	-8	2	4	
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	-8	2	4	$+8{\cdot}$II
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	0	10	20	: 10
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	0	1	2	

Nachdem das oben formulierte Ziel erreicht ist, ist es am einfachsten, wenn man das LGS wieder in der üblichen Schreibweise notiert:

$$\begin{array}{cccccc} I & x & +y & & = & 1 \\ II & & y & +z & = & 2 \\ III & & & z & = & 2 \end{array}$$

Die dritte Zeile lässt sofort erkennen, dass $z = 2$ sein muss. Setzt man diesen Wert in die zweite Zeile ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} y + 2 &= 2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Womit auch der zweite Variablenwert ermittelt wäre. Setzt man diesen (und ggf., allerdings nicht in diesem Beispiel, auch den Wert von z) in die erste Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} x + 0 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Damit sind dann alle drei Variablenwerte bestimmt, das LGS ist gelöst[7].

Die verschiedenen Möglichkeiten

Wie schon aus der Mittelstufe bekant sein sollte[8], kann ein LGS **eine**, **keine** oder **unendlich viele** Lösungen besitzen. Wie diese Fälle im Rahmen des Gauß-Algorithmus unterschieden werden können, soll nun geklärt werden. Dabei wird immer davon ausgegangen, dass die beschriebenen Situationen nicht durch Rechenfahler entstanden sind. Außerdem müssen wir uns nun von dem bisherigen Beispiel verabschieden, da dieses ja nur einen der drei Fälle abdeckt — es hat eine Lösung.
Entsteht beim Gauß-Algorithmus eine Zeile, welche die folgende Form hat[9]:

$$0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad ?$$

Wenn also alle Zahlen, die sich auf die Variablen beziehen, Null sind und die Zahl, die für sich ganz rechts steht nicht auch Null ist, dann ist das LGS **unlösbar**, es hat keine Lösung. Das könnte so aussehen:

$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & 1 & 0 & 1 & \\
3 & 1 & -2 & -1 & -3\cdot\mathrm{I} \\
4 & 2 & -2 & 1 & -4\cdot\mathrm{I} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & -2 & -2 & -4 & :(-2) \\
0 & -2 & -2 & -3 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & -2 & -2 & -3 & +2\cdot\mathrm{II} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow \\
\hline
\end{array}$$

Die entscheidende Zeile ist mit einem ← gekennzeichnet.
Die weitere Bearbeitung kann nun sofort abgebrochen werden. Dies gilt auch dann, wenn eine solche Zeile schon früher im Algorithmus auftritt. Man muss allerdings unterscheiden, ob die Zeile nur aus Nullen besteht, also auch der Zahlwert ganz rechts Null ist, oder eben nicht. Nur im letzten Fall ist das LGS unlösbar.
Nun zur Unterscheidung der beiden weiteren Fälle: **eine** oder **unendlich viele** Lösungen. Dazu bietet sich ein Hilfsbegriff an: Die 'Freiheitsgrade' des LGS. Man berechnet den Freiheitsgrad eines LGS, indem man von der Anzahl der Variablen die Anzahl der Zeilen subtrahiert, die nicht nur aus Nullen bestehen, nachdem man das Gauß-Verfahren soweit wie möglich durchgeführt hat. Bei den bisherigen LGS-Beispielen war die Anzahl der Variablen immer 3 und auch die Anzahl der Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen, war immer 3. Damit ergab sich immer der Freiheitsgrad: $3 - 3 = 0$.
Anders sähe es etwa bei dem folgenden Gleichungssystem aus:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

[7] Auch wenn die Lösung aus drei Zahlen besteht, ist es nur **eine** Lösung! Aus den drei Gleichungen werden nur dann in allen drei Fällen wahre Aussagen, wenn man in **allen drei** Gleichungen für x die 1, für y die 0 und für z die 2 einsetzt!

[8] Ähem!

[9] Das Fragezeichen steht hier für irgendeine Zahl, solange es keine Null ist!

Dieses LGS hat immer noch drei Variablen[10], aber nur noch zwei Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen. Somit wäre der Freiheitsgrad: $3 - 2 = 1$. Bei:

1	1	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0

wäre der Freiheitsgrad sogar 2, weil es nur eine (die erste) Zeile gibt, die nicht nur aus Nullen besteht!
Die Unterscheidungsregel ist nun ausgesprochen einfach: Ist der Freiheitsgrad 0, dann hat das LGS **eine** Lösung, ist er größer als Null, dann hat das LGS **unendlich viele** Lösungen[11].

Nicht-quadratische LGS

LGS bei denen die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen ist, nennt man 'quadratische' LGS. In der Mittelstufe werden nur diese LGS behandelt. Wie schon oben erwähnt, gibt es aber auch 'überbestimmte' LGS, bei denen die Anzahl der Gleichungen größer ist als die Anzahl der Variablen und 'unterbstimmte', bei denen es weniger Gleichungen als Variablen gibt.
Das Schöne ist nun, dass sich bei diesen LGS nix ändert! Das Verfahren des Gauß-Algorithmus bleibt gleich und auch die Interpretation, ob es keine, eine oder unendlich viele Lösungen gibt, bleibt gleich.
Wenn man bis hier alles verstanden hat, dann sollte allerdings klar sein, dass bei unterbestimmten LGS nur die Fälle auftreten können, dass das LGS keine oder unendlich viele Lösungen hat. Der Fall, dass eine Lösung vorliegt, kann nicht auftreten. Wenn das nicht klar ist, dann sollte man diesen Text noch mal von Anfang an lesen!
Für den Fall eines überbestimmten LGS hier ein Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} I & 2x+y & = & 11 \\ II & x-y & = & -2 \\ III & 3x+2y & = & 19 \end{array}$$

2	1	11	Tausch mit II
1	-1	-2	Tausch mit I
3	2	19	
1	-1	-2	
2	1	11	$-2{\cdot}$I
3	2	19	$-3{\cdot}$I
1	-1	-2	
0	3	15	: 3
0	5	25	
1	-1	-2	
0	1	5	
0	5	25	$-5{\cdot}$II
1	-1	-2	
0	1	5	
0	0	0	

Das LGS hat den Freiheitsgrad 0, denn es gibt zwei Variablen und zwei Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen. Es hat also eine Lösung ($x = 3$ und $y = 5$).

[10] Die Anzahl der Variablen ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der Spalten des LGS.

[11] Worin dann noch der Unterschied etwa zwischen Freiheitsgrad 1 und Freiheitsgrad 2 besteht, soll euch euer Lehrer erklären.

Übungen

Die ganze schöne Theorie nutzt nix, wenn man nicht übt[12]!

A1. Bringe die folgenden Gleichungssysteme in die Matrixform:

$$\begin{array}{llrcl}
\text{a)} & I & 2x+3y & = & 7 \\
 & II & 4x-7y & = & 11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{b)} & I & 2x+y & = & 2 \\
 & II & -x+2y & = & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{c)} & I & 3a+5b-c & = & 7 \\
 & II & 2a+b+c & = & 1 \\
 & III & 7a-3b+2c & = & 13
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{d)} & I & 5x-y & = & 3 \\
 & II & y+2z & = & 11 \\
 & III & 3x+z & = & 7
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{e)} & I & 2x+7y & = & 12 \\
 & II & 5x+2y & = & 10 \\
 & III & x-y & = & 14
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{f)} & I & 3a+4b-c & = & 0 \\
 & II & 2a+2b-c & = & 1
\end{array}$$

A2. Bei den folgenden Aufgaben steht ein '?' für eine Zahl, die nicht Null ist. Gib jeweils an, wie die Lösung des zugehörigen LGS aussieht (eine, keine, unendlich viele Lösungen). Gib im Falle unendlich vieler Lösungen auch den Freiheitsgrad des LGS an.

$$\text{a)}\ \begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ \hline \end{array}
\qquad
\text{b)}\ \begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \\ \hline \end{array}
\qquad
\text{c)}\ \begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{d)}\ \begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}
\qquad
\text{e)}\ \begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ \hline \end{array}
\qquad
\text{f)}\ \begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? \\ \hline \end{array}$$

A3. Löse die folgenden LGS. Bei manchen kann es günstiger sein ein Lösungsverfahren aus der Mittelstufe anzuwenden als den Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{llrcr}
\text{a)} & I & 2x+y & = & 2 \\
 & II & x & = & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{b)} & I & x-4y & = & 2 \\
 & II & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y & = & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{c)} & I & 4x+y & = & 5 \\
 & II & 2x-y & = & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcr}
\text{d)} & I & 2a+3b & = & 5 \\
 & II & 4a+6b & = & 9
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{e)} & I & 4a-3b & = & 2 \\
 & II & -8a+6n & = & -4
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{f)} & I & \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b & = & 2 \\
 & II & 2a+3b & = & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcr}
\text{g)} & I & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y & = & \frac{13}{36} \\
 & II & \frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y & = & -\frac{37}{24}
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{h)} & I & 0.3x-0.5y & = & -0.29 \\
 & II & 1.2x+3.3y & = & 2.55
\end{array}
\quad
\begin{array}{llrcr}
\text{i)} & I & \frac{1}{4}x-0.7y & = & 1.2 \\
 & II & 0.5x-\frac{7}{5}y & = & \frac{5}{2}
\end{array}$$

A4. Löse die folgenden LGS mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{llrcl}
\text{a)} & I & 2a+3b-c & = & 0 \\
 & II & a-3b+c & = & 3 \\
 & III & 4a+2b-3c & = & -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{b)} & I & a-b+c & = & 2 \\
 & II & -a+b+c & = & 1 \\
 & III & 2a-2b+4c & = & 7
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{c)} & I & 3x+2y-z & = & 1 \\
 & II & 2x-2y+z & = & 2 \\
 & III & 10y-5z & = & -3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{d)} & I & 2x+3y-z & = & 7 \\
 & II & 3x-y+2z & = & 5 \\
 & III & -6x+13y-11z & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{e)} & I & 3a+2b-c & = & -4 \\
 & II & 2a-2b+3c & = & -3 \\
 & III & 5a+4b+c & = & -10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{f)} & I & 5a+2b-2c & = & 6 \\
 & II & 3a+b+c & = & 2 \\
 & III & 16a+7b-13c & = & 24
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{g)} & I & 4a-6b+c & = & 5 \\
 & II & 2a+c & = & 6 \\
 & III & 9b-c & = & -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcl}
\text{h)} & I & 2x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z & = & \frac{1}{12} \\
 & II & \frac{1}{2}x-\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z & = & \frac{1}{48} \\
 & III & 4x-y+\frac{4}{3}z & = & \frac{1}{6}
\end{array}$$

[12] Das kann ich wirklich niemandem abnehmen.

A5. Bestimme die Lösungen mit dem Gauß-Algorithmus

a)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3a & = & \frac{3}{7} \\ II & 14a & = & 2 \\ III & -2a & = & -\frac{2}{7} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2x & = & 7 \\ II & 3x & = & 10.5 \\ III & 4x & = & 15 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2a + \frac{1}{2}b & = & -17 \\ II & \frac{1}{4}a + b & = & 8\frac{1}{2} \\ III & -a + b & = & 16 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3x + 2y & = & \frac{1}{2} \\ II & 2x - y & = & \frac{1}{3} \\ III & 6x + 18y & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2a + 2b - c + d & = & 0 \\ II & 3a + b - 2c + 2d & = & 1 \\ III & -5a + b + 4c - 4d & = & -3 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{lrcl} I & 5a + 2b - 3c + d & = & 2 \\ II & 8a - b - c + 2d & = & 1 \\ III & -\frac{1}{6}a + \frac{4}{3}b - \frac{7}{6}c - \frac{1}{6}d & = & 1 \end{array}$$

A6. Drei Flaschen Cola, eine Dose Bier und eine Tüte Chips kosten 4.85€ . Zwei Flaschen Cola, zwei Dosen Bier und eine Tüte Chips kosten 4.45€ . Eine Flasch Cola, vier Dosen Bier und zwei Tüten Chips kosten 5.93€ . Was kostet eine Flasche Cola, was eine Dose Bier und was eine Tüte Chips?

A7. 300 Dollar, 200 Rubel, 100 Pfund, 200 Franken und 200 Yen kosten 546.68€ . 100 Dollar, 100 Rubel, 200 Pfund, 300 Franken und 300 Yen kosten 574.99€ . 100 Dollar, 1000 Rubel und 500 Yen kosten 102.82€ . 200 Pfund, 100 Franken und 300 Yen kosten 315.77€ . 500 Rubel und 1000 Yen kosten 14.45€ .
Was kosten 100 Dollar, 100 Rubel, 100 Pfund, 100 Franken und 100 Yen?

A8. Eine ganzrationale Funktion 3ten Grades hat die Nullstellen $x = 1$ und $x = 5$. Sie besitzt bei $x = 2$ eine waagerechte Tangente und bei $x = 6$ eine Wendestelle.
Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

Lösungen

Ich habe mich natürlich bemüht **keine** Fehler zu machen, aber — oh Wunder — ich bin ein Mensch und Menschen **machen** Fehler! Sollte sich ein solcher in meine Lösungen eingeschlichen haben, so bitte ich höflichst um Mitteilung, ich werde dann den Fehler korrigieren, aber nun soll es los gehen.

A1.

a) $\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -7 & 11 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 & 13 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ \hline \end{array}$

e) $\begin{array}{rr|r} 2 & 7 & 12 \\ 5 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 14 \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$

A2.

a) Eine Lösung
b) Keine Lösung
c) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 1
d) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 1
e) Eine Lösung
f) Keine Lösung

A3.

a) $x = 1, y = 0$ am besten mit dem Einsetzungsverfahren
b) $x = 10, y = 2$
c) $x = \frac{1}{2}, y = 3$ am besten mit dem Additionsverfahren
d) Keine Lösung
e) Unendlich viele Lösungen
f) $a = 2, b = -2$
g) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$
h) $x = -.2, y = 0.7$
i) Keine Lösung

A4.

a) $a = 1, b = 0, c = 2$
b) Unendlich viele Lösungen. Bei dieser Aufgabe ist zusätzlich interessant, dass $c = \frac{3}{2}$ sein **muss**, aber dennoch unendlich viele Lösungen (für a und b) möglich bleiben!
c) Unlösbar
d) Unlösbar
e) $x = -1, y = -1, z = -1$
f) Unendlich viele Lösungen
g) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = 5$
h) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 2!

A5.

a) $a = \frac{1}{7}$
b) Unlösbar
c) $a = -10, b = 6$
d) Unlösbar

e) Unendlich viele Lösungen

f) Unlösbar

A6. Nennt man die Variablen für Cola (c), Bier (g = Grundnahrungsmittel) und Chips (t), dann ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} I & 3c+g+t & = & 4.85 \\ II & 2c+2g+t & = & 4.45 \\ III & c+4g+2t & = & 5.93 \end{array}$$

Es hat die Lösungen: $c = 0.99, \quad g = 0.59, \quad t = 1.29$

Die Besonderheit dieser Aufgabe besteht darin, dass jeweils nach 100 der Währung gefragt wird. Mit d =Dollar, r =Rubel, p =Pfund, f =Franken und y =Yen ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcl} I & 3d+2r+p+2f+2y & = & 546.68 \\ II & d+r+2p+3f+3y & = & 574.99 \\ III & d+10r+5y & = & \\ IV & 2p+f+3y & = & 315.77 \\ V & 5r+10y & = & 14.45 \end{array}$$

Damit ergibt sich: 100 Dollar=85.47€ , 100 Rubel=1.35€ , 100 Pfund=113.63€ , 100 Franken=86.20€ und 100 Yen=0.77€ .

Die oben genannten Werte beziehen sich auf den 8.7.2018!

A7. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und damit die Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Aus den obigen Angaben ergibt sich: $f(1) = f(5) = 0$ (Nullstellen), $f'(2) = 0$ weil dort eine waagerechte Tangente liegt, also die Steigung gleich Null ist und $f''(6) = 0$ weil in einem Wendepunkt die Krümmung Null ist.

Setzt man die x-Werte in die jeweilige Gleichung ein und auch die entsprechenden $f(x)/f'(x)/f''(x)$-Werte, dann ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcl} I & a+b+c+d & = & 0 \\ II & 125a+25b+5c+d & = & 0 \\ III & 12a+4b+c & = & 0 \\ IV & 36a+2b & = & 0 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ und $d = 0$ und damit lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + o = 0$$

Es gibt also keine '*echte*' Funktion dritten Grades, die diese Bedingungen erfüllt! Warum nicht?