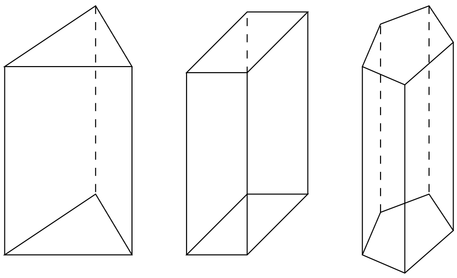
Raum- und Flächenmessung bei Körpern

Prismen

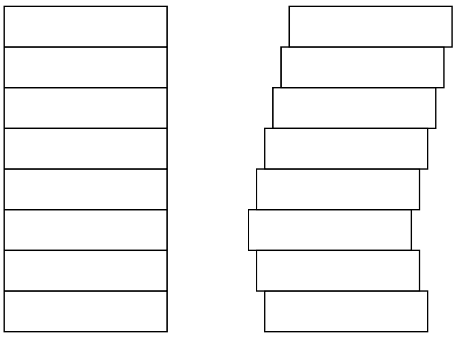
Ein Prisma ist ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke sind und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind. Ist der Winkel zwischen Grund- und Seitenflächen ein rechter Winkel, dann handelt es sich um ein gerades Prisma, sonst um ein schiefes Prisma.
Sind die Seiten der Grundfläche alle gleich lang und ist die Fläche konvex, dann heißt das Prisma regelmässiges Prisma.



Die beiden parallelen Flächen heißen '*Grundfläche*', die anderen Flächen '*Seitenflächen*'. Der Abstand zwischen den beiden Grundflächen heißt '*Höhe*' des Prismas.
Für das Volumen eines Prismas gilt:

$$\boxed{V = G \cdot h}$$

wobei V das Volumen, G die Grundfläche und h die Höhe des Prismas ist.
Der '*Satz des Cavalieri*' besagt: Lassen sich zwei Körper unterschiedlichen Flächeninhalts zwischen zwei parallelen Ebenen anordnen und ergibt jeder Schnitt der Körper, der zu diesen Ebenen ebenfalls parallel ist, bei beiden Körpern eine gleich große Schnittfläche, dann ist das Volumen der beiden Körper gleich.
Veranschaulichen lässt sich das durch folgenden Figur:



Das Bild zeigt einen Körper von der Seite. Durch die 'Verschiebung' der Einzelteile ändert sich das Volumen nicht!
Daraus folgt aber für **jedes** Prisma:

$$V = G \cdot h$$

Beispiel:
Wenn man ein Prisma hat, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 4$cm und $b = 7cm$ und einer Höhe von 10cm. Dann berechnet man das Volumen des Prismas:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{4\cdot 7}{2} \\ &= 14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Mit der bekannten Dreiecksfläche gilt dann:

$$V_{\text{Prisma}} = 14 \cdot 10 \text{ cm}^3$$

Die Oberfläche eines Prismas besteht aus den beiden Grundflächen und den Seitenflächen.
Wollte man in dem obigen Beispiel die Oberfläche des Prismas berechnen, dann müsste man erst die Hypotenuse des Dreiecks berechnen. Diese ist:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 4^2 + 7^2 &= c^2 \\ 16 + 49 &= c^2 \\ 65 &= c^2 \end{aligned}$$

Die Hypotenuse hat also eine Länge von $\sqrt{65}$ cm. Nun sind:
Die beiden Grundflächen 14 cm^2 groß. Die drei Seitenflächen haben die Flächenmaße: $4 \cdot 10$ cm^2, $7 \cdot 10$ cm^2 und $\sqrt{65} \cdot 10$ cm^2.
Damit ist die Gesamtoberfläche:

$$14 + 14 + 40 + 70 + 10\sqrt{65} \approx 218.62 \text{ cm}^2$$

Aufgaben:

A1. Ein Schwimmbecken ist 15,5m lang, 8,4m breit und soll 3m tief mit Wasser gefüllt werden. Wieviel Kubikmeter Wasser sind nötig.

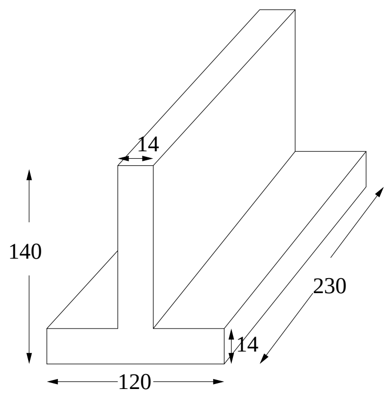
A2. Ein Gartenweg, der 35m lang und 0,9m breit ist, soll 10cm hoch mit Schlacke bedeckt werden. Wieviele Kubikmeter sind nötig?

A3. Berechne die Oberfläche und das Volumen eines regelmässigen Prismas, dessen Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge 10 cm ist und das eine Höhe von 15cm hat.

A4. Ein Prisma hat eine dreieckige Grundfläche. Von dieser ist bekannt, dass die Seite c 7cm lang ist und h_c 4cm lang ist. Das Prisma ist 10cm hoch. Berechne das Volumen des Prismas.

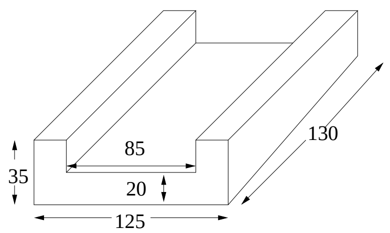
A5. Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma hat eine Oberfläche von 504 cm^2. Die Länge der Höhe verhält sich zur Länge der Grundseite wie 3:1. Wie lang sind die Kanten und was ist das Volumen des Prismas?

A6. Gegeben ist ein Eisenträger mit den folgenden Maßen:



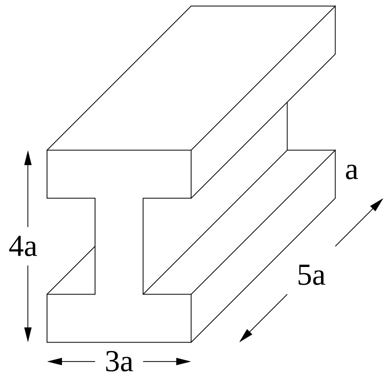
Wie schwer ist der Träger, wenn man davon ausgeht, dass ein Kubikdezimeter des Materials 7,8kg schwer ist? Die Längenangaben sind alle in Millimetern.

A7. Gegeben ist ein Eisenträger mit den folgenden Maßen:



Wie schwer ist der Träger, wenn man davon ausgeht, dass ein Kubikdezimeter des Materials 7,3kg schwer ist? Die Längenangaben sind alle in Millimetern.

A8. Gegeben ist ein Körper mit den folgenden Maßen:



Berechne Volumen und Oberfläche dieses Körpers.

Zylinder

Je mehr Ecken das (regelmäßige) Vieleck eines Prismas hat, desto mehr nähert es sich einem Kreis an. Es ist daher nicht verwunderlich, dass auch für einen Zylinder gilt:

$$\boxed{V = G \cdot h}$$

Wobei wiederum G für die Grundfläche und h für die Höhe des Zylinders steht. V ist wieder das Volumen. Die Oberfläche besteht nun aus den beiden (Grund)Kreisen und der Mantelfläche.
Beispiel:
Ein Zylinder habe einen Durchmesser von 10cm und eine Höhe von 15cm. Sein Volumen und seine Oberfläche berechnet sich folgendermaßen:
Der Radius der Grundfläche ist offenbar $r = 5$cm. Damit ergibt sich:
Volumen:

$$\begin{aligned} V &= r^2 \cdot \pi \cdot h \\ &= 5^2 \cdot \pi \cdot 15 \\ &= 25 \cdot \pi \cdot 15 \\ &\approx 1178.09 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

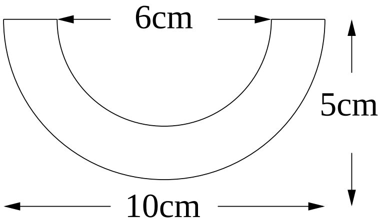
Oberfläche:

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot \text{ Grundfläche } + \text{ Mantelfläche} \\ &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2r\pi \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 5^2 \cdot \pi + 2 \cdot 5\pi \cdot 15 \\ &\approx 628.32 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Aufgaben

A9. Ein rundes Schwimmbad mit einem Durchmesser von 10 Metern soll 2.2 Meter hoch mit Wasser gefüllt werden. Wie teuer ist eine Füllung dieses Schwimmbeckens, wenn ein Kubikmeter Wasser 99 Eurocent kostet?

A10. Aus Gusseisen ($\rho = 7.9$ kg/dm^2) soll eine Rinne hergestellt werden. Diese hat im Querschnitt das folgende Aussehen:



Wie schwer wird die Rinne, wenn sie insgesamt 3 Meter lang werden soll?

A11. Ein Körper besteht aus drei aufeinander liegenden Scheiben:

Die unterste Scheibe hat einen Durchmesser von 10cm, die mittlere einen von 8cm und die oberste von 6cm. Alle drei Scheiben sind 2cm hoch. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche dieses Körpers?

Lösungen

A1. Das Volumen ist einfach $15.5 \cdot 8.4 \cdot 3 = 390.6\text{m}^3$

A2. Hierbei ist nur darauf zu achten, dass für die Höhe das richtige Maß verwendet wird. Dann ergibt sich $35 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 3.15\text{m}^3$

A3. Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von $10 \cdot 10 = 100\text{cm}^2$. Die Seitenflächen haben einen Flächeninhalt von $10 \cdot 15 = 150\ \text{cm}^2$. Damit ist die Oberfläche des Prismas:

$$V = 100 \cdot 15 = 1500\ \text{cm}^3$$

Die Oberfläche ist

$$O = 100 + 100 + 4 \cdot 150 = 800\ \text{cm}^2$$

A4. Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von $\frac{7 \cdot 4}{2} = 2\ \text{cm}^2$. Damit ist das Volumen gleich $14 \cdot 10 = 140\ \text{cm}^3$.

A5. Zunächst muss eine 'Formel' für die Oberfläche erstellt werden. Dabei wird die Länge der Grundseite g genannt. Daraus folgt, dass die Höhe die Länge $3g$ hat. Die Oberfläche ist dabei:

$$O = 2 \cdot g^2 + 4 \cdot g \cdot 3g$$

Also insgesamt $14g$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} 14g &= 504 \\ g &= 36 \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass die Seitenlänge der Grundlänge $\sqrt{36} = 6$ cm ist. Die Höhe hat eine Länge von 18 cm. Das Volumen berechnet sich zu

$$A = g^2 \cdot 3g = 648\ \text{cm}^3$$

A6. Zunächst muss die Grundfläche berechnet werden. Diese ist aus zwei Rechtecken zusammengesetzt, die einmal $14 \times 120 = 1680\text{mm}^2$ und dann noch $14 \times (140 - 14) = 1764\text{mm}^2$, also zusammen 3444mm^2 beträgt. Diese Grundfläche muss nun mit der Höhe von 230mm multipliziert werden. Das ergibt ein Volumen von 792120mm^3.
Diese Größe muss nun in Kubikdezimeter umgerechnet werden und mit der Dichte multipliziert werden:

$$0.792120 \cdot 7.8 = 6.1785$$

Der Träger wiegt also ca. 6,2 kg.

A7. Hier besteht die Grundfläche aus drei Teilen:

$$85 \times 20 + 2(35 \times 20) = 3100\text{mm}^2$$

Somit hat man ein Volumen von

$$3100 \times 130 = 403000\text{mm}^3 = 0.403\text{dm}^3$$

Somit wiegt der Träger $0.403 \cdot 7.3 = 2.9419$, also ca. 2.9 kg.

A8. Zunächst die Oberfläche.
Die Grundfläche besteht aus drei Teilen und berechnet sich zu

$$a \cdot 3a + a \cdot 3a + a \cdot 2a = 8a^2$$

Von dieser Grundfläche gibt es zwei, also zusammen $16a^2$.
Weiterhin gibt es noch 12 Seitenflächen:

$$2 \cdot a \cdot 5a + 8 \cdot a \cdot 5a + 2 \cdot 2a \cdot 5a = 90a^2$$

Somit beträgt die Oberfläche $16a^2 + 90a^2 = 106a^2$.

Das Volumen berechnet sich aus dem Produkt einer Grundfläche mit der Höhe:

$$16a^2 \cdot 5a = 80a^3$$

A9. Der Radius beträgt offensichtlich 5m. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= 5^2\pi \cdot 2.2 \\ &= 25\pi \cdot 2.2 \\ &= 55\pi \approx 172.79 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen muss nun mit dem Preis multipliziert werden und man erhält: $172.79 \cdot 0.99 = 171.06€$.

A10. Offenbar handelt es sich um einen halben Zylinder, aus dem ebenfalls ein halber Zylinder ausgeschnitten wurde. Der 'große' Halbzylinder hat das Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}5^2\pi \cdot 300 \\ &= 3750\pi \approx 11780.97 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Für das Gewicht ergibt sich: $11.78 \cdot 7.9 = 93.07$ kg.
Für den kleinen Halbzylinder ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}3^2\pi \cdot 300 \\ &= 1350\pi \approx 4241.15 \end{aligned}$$

Und sein Gewicht berechnet sich zu $4.24115 \cdot 7.9 = 33.51$ kg. Das Gewicht der Rinne beträgt demnach $93.07 - 33.51 = 59.56$ kg.

A11. Am einfachsten ist noch das Volumen zu berechnen. Es besteht einfach aus der Summe der Volumen der drei Zylinder.

$$\begin{aligned} V &= 5^2\pi \cdot 2 + 4^2\pi \cdot 2 + 3^2\pi \cdot 2 \\ &= 50\pi + 32\pi + 18\pi \\ &= 100\pi \approx 314.16 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Die Oberfläche ist wesentlich schwieriger zu berechnen. Zunächst einmal muss festgestellt werden, welche Teilflächen denn überhaupt zu der gesuchten Oberfläche gehören.
Das sind einmal ein großer Kreis (unten) und ein kleiner Kreis (oben). Dazu kommt ein Torus (groß - mittel) und noch einer (mittel - klein). Weiterhin gehören noch die drei Mantelflächen der Zylinder zu der Oberfläche:

$$\begin{aligned} O &= 5^2\pi + 3^2\pi + (5^2\pi - 4^2\pi) + (4^2\pi - 3^2\pi) + 2 \cdot 5\pi \cdot 2 + 2 \cdot 4\pi \cdot 2 + 2 \cdot 3\pi \cdot 2 \\ &= 25\pi + 9\pi + 9\pi + 7\pi + 20\pi + 16\pi + 12\pi \\ &= 98\pi \approx 307.88 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$