Lineare Funktionen

Allgemeines

Jede Funktion, die sich in der Form

$$f(x) = m \cdot x + n$$

schreiben lässt, heißt '*Lineare Funktion*'. Beispiele für lineare Funktionen sind:

$$\begin{aligned} &f(x) = 2x + 3 \\ &f(x) = \sqrt{2}x + 3 \\ &f(x) = \tfrac{1}{17}x - \tfrac{2}{5} \\ &f(x) = (x-1) + 2(x-3)[= 3x - 7] \end{aligned}$$

Auch die letzte Funktion ist eine lineare Funktion, denn sie lässt sich in die oben genannte Form bringen (in eckigen Klammern gezeigt).
Eine wichtige Gemeinsamkeit aller linearen Funktionen ist, dass sie alle eine Gerade als Graph haben.

A1. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 2x + 3 \\ \text{b)} & f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \\ \text{c)} & f(x) = -x + 4 \end{array}$$

Es wird also darauf ankommen zu ermitteln, welche Bedeutungen die Parameter m und n in der Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$ haben. Hierzu können die Parameter unabhängig voneinander geändert werden und dabei betrachtet werden, wie sich der Graph ändert.

A2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in **ein** Koordinatensystem

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = x + 1 \\ \text{b)} & f(x) = x - 1 \\ \text{c)} & f(x) = x + 3 \\ \text{d)} & f(x) = x - 2 \end{array}$$

Man erkennt deutlich, dass alle Geraden parallel verlaufen. Darüber hinaus sieht man, dass die y-Achse immer bei dem y-Wert geschnitten wird, den der Parameter n angibt. Je größer der n-Wert, desto höher und je niedriger der n-Wert, desto tiefer liegt die Gerade.
Der Wert von n heißt daher auch '*y-Achsenabschnitt*'
Schwieriger ist es, die Bedeutung von m zu erkennen. Auch hier sollen zuerst mal einige Funktionsgraphen gezeichnet werden, bei denen n konstant bleibt und m geändert wird.

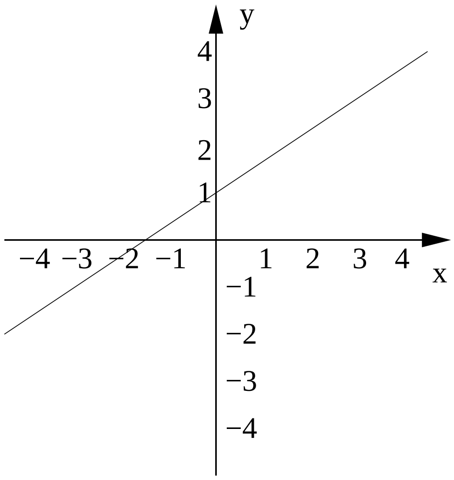
A3. Zeichne in **ein** Koordinatensystem

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 2x + 1 \\ \text{b)} & f(x) = -2x + 1 \\ \text{c)} & f(x) = x + 1 \\ \text{d)} & f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}$$

Es ist erkennbar, dass alle Funktionsgraphen durch den Punt (0/1) gehen, aber auch alle eine andere Steigung haben.

Eine lineare Funktion $f(x) = mx + n$ geht immer durch den Punkt $(0/n)$.

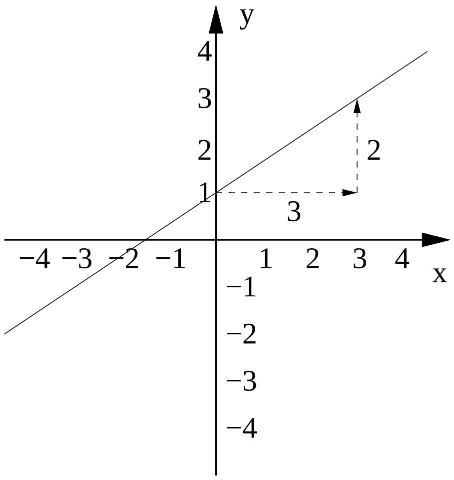
Die Steigung ist nicht so leicht erkennbar, wie der y-Achsenabschnitt. Dazu muss man sich einen Funktionsgraphen genauer ansehen:



Es handelt sich um den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$$

Den Wert $m = \frac{2}{3}$ erkennt man am Graphen erst dann, wenn man von einem beliebigen Punkt des Graphen aus um drei (Nenner!) Einheiten nach rechts geht. Man muss dann um 2 Einheiten (Zähler) nach oben gehen, um wieder auf den Graphen zurück zu kommen.



Dahinter verbirgt sich eine allgemeine Regel:

> Der Parameter m gibt die '*Steigung*' des Graphen einer linearen Funktion an. Er hat die folgende Bedeutung: Geht man von einem beliebigen Punkt des Graphen um den Nenner nach rechts, dann muss man um den Zähler nach oben ($m > 0$) bzw. unten ($m < 0$), um wieder auf den Graphen der Funktion zu kommen.

Darstellungsformen

Aus dem letzten Abschnitt ergibt sich, dass es drei verschiedene Arten gibt, eine lineare Funktion anzugeben:
1. Mit einer Gleichung
2. Durch zwei Punkte, durch die der Graph der Funktion geht
3. Durch einen Punkt, durch den der Graph der Funktion geht und die Steigung der Funktion

Im folgenden soll nun dargestellt werden, wie man eine Form in eine andere umwandelt. Somit ergeben sich sechs Möglichkeiten.

Gleichung → Zwei Punkte

In diesem Fall müssen nur zwei beliebige, aber unterschiedliche Punkte für x in die Gleichung eingesetzt und die zugehörigen y-Werte berechnet werden.
Beispiel:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 3$. Dazu sucht man sich zwei beliebige x-Werte aus, z.B. $x = 1$ und $x = 10$ und setzt diese in die Funktionsgleichung ein, um die entsprechenden y-Werte zu berechnen:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$
$$f(10) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$$

In diesem Fall erhält man, dass der Graph der Funktion durch die Punkte $A(1/5)$ und $B(10/23)$ geht.

A4. Bestimme je zwei Punkte, durch die der Graph der angegebenen Funktion führt.

a) $f(x) = 3x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 10$
c) $f(x) = 100x - 200$
d) $f(x) = -13x + 20$
e) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
f) $f(x) = \frac{1}{25}x - 10$

Gleichung → Punkt und Steigung

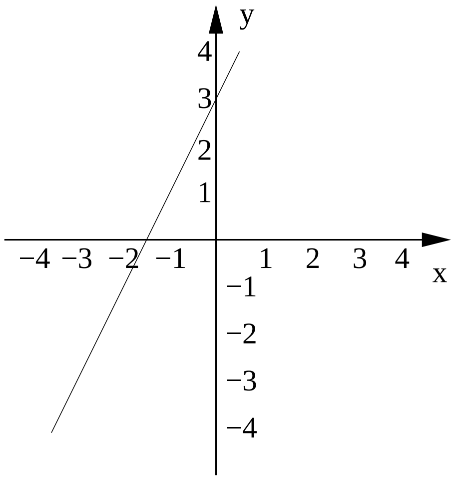
Punkt und Steigung → Zwei Punkte

Punkt und Steigung → Gleichung

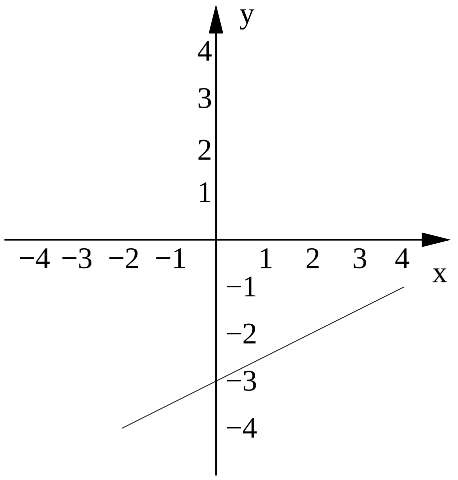
Zwei Punkte → Punkt und Steigung

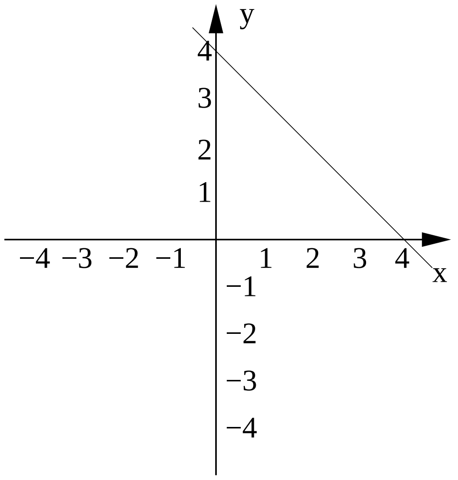
Zwei Punkte → Gleichung

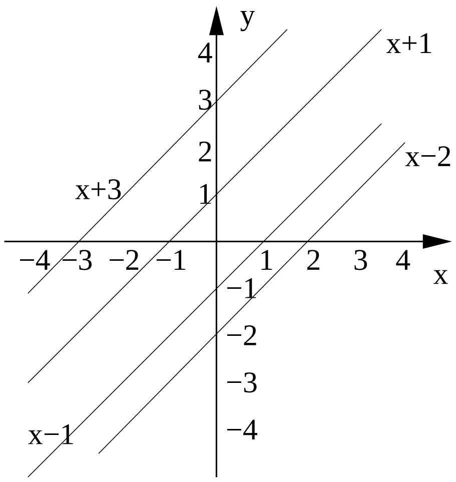
Lösungen

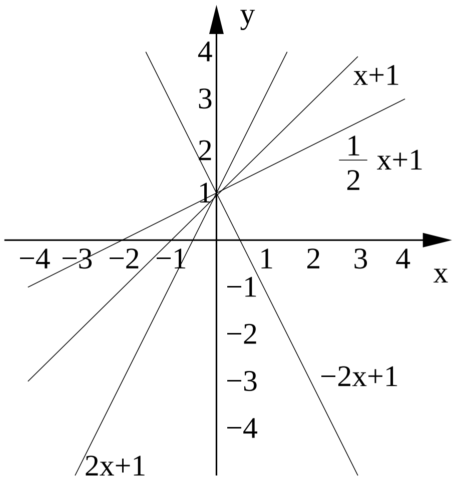

y
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4
x
−1
−2
−3
−4

A1.


y
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4
x
−1
−2
−3
−4


y
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4
x
−1
−2
−3
−4

A2. 

A3. 

A4. Die folgenden Angaben sind natürlich nur **mögliche** Antworten. Wählt man andere x-Werte, ergeben sich logischerweise auch andere y-Werte.

a) $A(1/2), B(10/29)$
b) $A(0/10), B(10/15)$
c) $A(0/-200), B(2/0)$
d) $A(0/20), B(1/7)$
e) $A(0/\frac{7}{3}), B(1/2)$
f) $A(0/-10), B(25/-9)$