Mathematik in der Schule

28. August 2021

Vim, XFig, InkScape, Gimp und Gnuplot!

Vorwort

Dieser Text ist **kein** Lehrbuch der Mathematik. Es sollte im besten Falle als eine Art Nachschlagwerk dienen, in dem man die Fragen zu seinen mathematischen Aufgaben in der Schule beantwortet bekommt. Die Aufgaben sind auch nicht als Übungsaufgaben gedacht, dazu sind es auchviel zu wenige, sondern als Kontrolle, ob man das Gelernte auch verstanden hat und anwenden kann.

Warum dieser Text?

Ich arbeite am Weiterbildungskolleg der Städteregion Aachen, dem MSK (Michael Schumacher Kolleg)[1], und habe sehr schnell bemerkt, dass es bei den Studierenden dieses Kollegs ein Problem gibt, das so bei anderen Schulformen nicht auftaucht: Es gibt kein angemessenes Schulbuch für das Fach Mathematik!
Der Grund dafür ist sehr einfach. Während auf dem Gymansium oder der Gesamtschule die Schülerinnen und Schüler den Stoff der Mittelstufe praktisch 'gerade erst' gelernt haben und man davon ausgehen kann, dass die wesentlichen Kenntnisse noch vorhanden sind[2], liegt der Besuch der Mittelstufe mit all ihren Inhalten bei manchen Studierenden schon Jahre zurück und diese Inhalte sind nicht mehr präsent.
In den regulären Schulbüchern der gymansialen Oberstufe werden aber nur die Techniken und Methoden erwähnt, die auch wirklich oberstufenrelevant sind. Für Studierende eines Kollegs oder eines Abendgymansiums sind sie schlicht nicht geeignet.
Daher dieser Text hier!

Eine große Bitte!!!

Dieser Text ist nicht 'fertig'. Zur Zeit, in der ich diese Zeilen schreibe, sind manche Kapitel nochnicht einmal angefangen, manche noch unvollständig und vor allem, dieser Text ist

fohlär Pfäler

Solltest du einen solchen Fehler finden, vollkommen gleichgültig, ob es die Zeichensetzung, die Rechtschreibung oder den Ausdruck betrifft. Sollten mathematische Fehler gefunden werden oder sind die Musterlösungen der Aufgaben falsch.
Bitte, bitte, bitte sende eine Nachricht an

cremer@fritz.rmi.de

mit einem möglichst genauen Fehlerbericht (Seitenzahl, Art des Fehlers, genaue Position des Fehlers), damit ich diese Fehler nach und nach korrigieren kann.
Bevor ihr aber eine Mail schickt, stellt sicher, dass ihr auch die aktuellste 'Ausgabe' dieses Textes habt (Eventuell ist sonst euer Fehler schon korrigiert). Aus diesem Grunde steht auf der Titelseite immer das Datum der letzten Bearbeitung!

Eine Hilfe zum Lesen

Der Text ist in vier große Teile geteilt:

1. Ein erster Teil enthält viele wichtige Inhalte aus dem Teil des schulischen Mathematikunterrichts, der normalerweise in der Unter- oder Mittelstufe unterrichtet wird und daher in einem Kolleg oder an einem Abendgymnasium zu kurz kommen muss.
2. Der zweite Teil behandelt das Themengebiet der Analysis. Der Teil der schulischen Mathematik, der in jedem Fall im Abitur vorkommt.
3. Der dritte Teil beinhaltet die Analytische Geometrie und die Vektorrechnung.
4. Der vierte und letzte Teil behandelt die Stochastik.

Dieser Text ist für Grund- **und** Leistungskurse konzipiert. Trotzdem gibt es natürlich Teile in der schulischen Mathematik, die ausschließlich für den Leistungskurs interessant sind.
Soll ein solcher Teil behandelt werden, dann ist der entsprechende Abschnitt folgendermaßen markiert:

Alles, was hinter diesem Zeichen folgt, ist im Wesentlichen nur für den Leistungskurs gedacht.

[1] Nur als Beispiel, bis ein endgültiger Name gefunden ist.
[2] Na ja!

Darüber hinaus gibt es auch Teile in diesem Buch, die als zusätzliche Erklärung gedacht sind und die zwar für das Verständnis wichtig sein können, im allgemeinen Schulalltag aber nicht gebraucht werden. Auch diese Abschnitte sind gesondert gekennzeichnet:

Alle Abschnitte, die dieser Markierung folgen, können bedenkenlos übergangen werden.

Danksagungen

Die Idee

Ja, ich weiß, das Kapitel, das niemand liest, aber dennoch möchte ich allen danken, die mir bei diesem Text geholfen haben.
Als ersten nenne ich Joe Oebel, der mich auf die Idee gebracht hat und den Studierenden des Corona-Semesters SS 2021, die bei mir Mathematikunterricht hatten, denn durch sie hatte ich schon eine Menge Material.
Joe unterstützte mich bei meiner Meinung, dass es kein geeignetes Mathmatikbuch für unsere Schule gäbe. Bis dahin war es bei mir nur so ein Gefühl, aber dann wurde mir klar, was an den eingesetzten Mathematikbüchern falsch war.
Sie waren für die gymnasiale Oberstufe geschrieben, aber in Wirklichkeit für die gymnasiale Oberstufe der Gymnasien und Gesamtschulen. Bei den Schülern dieser Schulformen kann man davon ausgehen, dass sie die Inhalte der Mittelstufe in den letzten Jahren zumindest unterrichtet bekommen hatten[3]
Bei unseren 'Studierenden' lagen die Inhalte der Mittelstufe aber zum Teil Jahre, manchmal auch Jahrzehnte zurück und daher musste ein Mathematikbuch für *unsere* Schule auch die Inhalte der Mittelstufe, die für den Oberstufenunterricht absolut notwendig sind, noch einmal enthalten.
So entstand die Idee.

Die Helfer:

[3] Wieviel davon — mitten in der Pubertät — wirklich hängen bleibt, steht auf einem anderen Blatt.

Keine Panik!

Inhaltsverzeichnis

I Voraussetzungen

Keine Panik!

1 Zahlen

Ganz elementar beschäftigt sich die Mathematik mit Zahlen, aber was heißt das? Mit welchen Zahlen beschäftigt sich die Mathematik und welche Regeln gelten für sie?
Sicherlich kann man nicht erwarten, dass alle möglichen Zahlen und Eigenschaften hier noch einmal vorgestellt werden, aber zumindest ein kleiner Überblick sollte doch geleistet werden.

1.1 Die natürlichen Zahlen

Die einfachsten Zahlen, und das dürften die sein, an welche die meisten denken, wenn sie das Wort 'Zahl' hören, sind wohl die natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Es sind die Zahlen, mit denen wir gewohnt sind **Anzahlen** anzugeben, also: 'drei Äpfel', 'fünf Flaschen Bier', usw.

1.1.1 Darstellungen

Die Darstellung dieser Zahlen ist nicht so einfach, wie es vielleicht den Anschein hat, denn immerhin gibt es unendlich viele von diesen Zahlen. In der Mathematik hat es sich eingebürgert, diese Zahlen zu sogenannten '**Mengen**' zusammen zu fassen. Dabei wird eine Menge entweder dadurch angegeben, dass zwischen zwei geschweiften Klammern die Werte stehen, die zu der Menge gehören (ggf. mit Auslassungzeichen, um anzuzeigen, dass es in diesem Sinne weiter geht). Die andere Alternative besteht darin, dass ein besonderes Zeichen für diese Menge gefunden und etabliert wird; im Falle der natürlichen Zahlen ist es das Zeichen: $\mathbb{N}$. Zusammenfassend kann man also sagen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

1.1.2 Rechenarten

Für die natürlichen Zahlen gelten, mit Einschränkungen[1], die sogenannten Grundrechenarten: Addition (+), Subtraktion (−), Multiplikation ($\cdot$ oder $\times$) und Division ($\div$).

1.1.2.1 Addition

Die einfachste Grundrechenart ist die Addition. Dabei werden zwei **Summanden** mit dem Rechenzeichen der Addition (+) zu einer Summe erhoben und das Ergebnis dieser Rechnung ist der Wert der Summe. Es gilt also:

$$\text{Summand} \ + \ \text{Summand} \ = \ \text{Wert der Summe}$$

Dabei ist der Ausdruck 'Summand + Summand' die eigentliche Summe.
In

$$2 + 3 = 5$$

etwa sind '2' und '3' die Summanden, '$2 + 3$' die Summe und '5' der Wert der Summe.

1.1.2.2 Multiplikation

Eigentlich ist die Multiplikation *nur* eine vereinfachte Darstellung für eine wiederholte Addition des immer gleichen Summanden. Es gilt etwa:

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5$$

Hierbei ist '$4 \cdot 5$' das sogenannte **Produkt** und '4' und '5' sind die sogenannten **Faktoren**. Das Ergebnis einer solchen Rechnung, hier wäre es die '20', wird dabei Wert des Produkts genannt. Es gilt also:

$$\text{Faktor} \ \cdot \ \text{Faktor} \ = \ \text{Wert des Produkts}$$

[1] Nicht alle Subtraktionen und Divisionen lassen sich innerhalb der natürlichen Zahlen durchführen, so gilt etwa für die Rechnung: '$5 - 7$' das aus der Grundschule bekannte 'geht nicht'.

1.1.2.3 Subtraktion

Die Subtraktion ist in gewisser Hinsicht die **Gegenrechnung** zur Addition. Damit ist gemeint, dass man, wenn man zunächst eine Addition ausgeführt hat und danach mit der gleichen Zahl eine Subtraktion ausführt, wieder die ursprüngliche Zahl erhält.
Addiert man etwa zur Zahl '5' die Zahl '3', erhält man als Wert die Zahl '8'. Subtrahiert man die '3', die man gerade erst zur '5' addiert hat, wieder von der '8', erhält man wieder die '5'.
Im Gegensatz zur Addition ist es bei der Subtraktion nicht egal, in welcher Reihenfolge die beiden Zahlen stehen, zwischen denen das Zeichen für die Subtraktion ('$-$') steht. Von der ersten Zahl, dem sogenannten **Minuenden** wird die zweite Zahl, der sogenannte **Subtrahend**, abgezogen. Damit ergibt sich:

$$\text{Minuend} \; - \; \text{Subtrahend} \; = \; \text{Wert der Diffenerenz}$$

Der Ausdruck 'Minuend$-$Subtrahend' wird dabei **Differenz** genannt.
Innerhalb der natürlichen Zahlen muss der Minuend größer als der Subtrahend sein, damit die Rechnung 'geht'.

1.1.2.4 Division

So, wie die Subtraktion eine Gegenrechnung der Addition ist, ist die Division eine Gegenrechnung zur Multiplikation. Es gilt:

$$\text{Dividend} \; \div \; \text{Divisor} \; = \; \text{Wert des Quotienten}$$

Wobei 'Dividend $\div$ Divisor' auch Quotient genannt wird.
Wie auch bei der Subtraktion kommt es auf die Reihenfolge an. Die erste Zahl, der Dividend wird durch die zweite Zahl, den Divisor geteilt.
Im Bereich der natürlichen Zahlen 'geht' diese Rechnung nur dann, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

1.1.2.5 Potenzen

Die sogenannte Potenz ist eine vereinfachte Schreibung einer Multiplikation von immer gleichen Zahlen, so wie die Multiplikation eine vereinfachte Schreibweise der immer gleichen Addition war. So kann man etwa schreiben:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

Allgemein bedeutet dabei der Ausdruck:

$$a^b = c$$

dass das 'a' 'b'-mal genommen werden muss und dann all die 'a's miteinander multipliziert werden. In der obigen 'Formel' werden 'a' Basis genannt, 'b' Exponent und 'c' ist dann die Potenz. Auch dazu noch ein konkretes Beispiel:

$$2^3 = 8$$

Hier ist '2' die Basis, '3' der Exponent und '8' die Potenz.
Für Potenzen gelten einige Rechenregeln, die mitunter sehr sinnvoll sein können. Auch wenn diese hier noch nicht vollständig vorgestellt werden können, da wir uns hier immer noch im Bereich der natürlichen Zahlen befinden, sollen diese hier schon vorgestellt werden, auch wenn ihr Sinn sich vielleicht erst später erschließt:

1. Potenzen, die addiert oder subtrahiert werden, können (in der Regel) **nicht** zusammen gefasst werden.

2. Werden Potenzen mit gleichen Exponenten multipliziert oder dividiert, dann ist es egal, ob man erst multipliziert und dividiert und dann potenziert, oder erst potenziert und dann multipliziert/dividiert:
$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$
$$a^c \div b^c = (a \div b)^c$$

3. Potenzen mit gleicher Basis werden miteinander multipliziert oder dividiert, indem man einfach die Exponenten addiert/subtrahiert und die Basis beibehält:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$
$$a^b \div a^c = a^{b-c}$$

4. Eine Potenz kann potenziert werden, indem man einfach die Exponenten multipliziert:
$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

Zwei **sehr** wichtige Regeln lauten noch:

5. Wird zu einer Zahl der Exponent 1 geschrieben, dann ergibt sich wieder die Zahl, also:
$$a^1 = a$$

6. Die nullte Potenz **jeder** Zahl ist 1, also

$$a^0 = 1$$

1.1.3 Grundlegende Rechenregeln

Einige Rechenregeln sind so fundamental, dass man oftmals vergisst sie zu erwähnen und ich gehe davon aus, dass sie auch den meisten bekannt sind, aber dennoch sollen sie hier noch einmal genannt werden.

1.1.3.1 Von lins nach rechts

Wenn keine andere Regel greift, dann werden Rechnungen in der Regel von links nach rechts durchgeführt. So ist etwa:

$$\begin{aligned} 2+3+5-4 &= 5+5-4 \\ &= 10-4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

1.1.3.2 Punkt- vor Strichrechnung

Die 'Punktrechnungen', Multiplikation und Division, müssen vor den 'Strichrechnungen', Addition und Subtraktion, ausgeführt werden. So ist etwa

$$\begin{aligned} 2+3\cdot 4-8\div 2+1 &= 2+12-8\div 2+1 \\ &= 2+12-4+1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

1.1.3.3 Erweiterung der Punkt-vor-Strich Regel

Generell kann gesagt werden, dass die 'höherwertige' Rechnung immer zuerst ausgeführt werden muss, was über das oben gesagte hinaus bedeutet, dass das Potenzieren noch vor dem Multiplizieren und Dividieren ausgeführt werden muss. So ist etwa

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

und nicht etwa '36', was man erhielte, wenn man sich nur an die 'Links-nach-Rechts' Regel halten würde.
Entsprechendes gilt für die Wurzelrechnungen, die ebenfalls vor den Punkt- und erst recht vor den Strichrechnungen durchgeführt werden müssen.

1.1.3.4 Klammern

Alle obigen Regeln[2] können durch Klammern außer Kraft gesetzt werden. Wann immer eine Klammer in einer Rechnung steht, muss der Ausdruck in der Klammer zuerst ausgerechnet werden. Stehen in der Klammer noch weitere Klammern, dann haben auch die Vorrang vor anderen Rechenausdrücken, was nichts anderes bedeutet, als dass Klammern 'von innen nach außen' berechnet[3] werden müssen.
Man betrachte die folgenden beiden Rechnungen, die den Unterschied deutlich machen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 4 &= 6 + 4 \\ &= 10 \\[1em] 2 \cdot (3 + 4) &= 2 \cdot 7 \\ &= 14 \end{aligned}$$

1.1.3.5 Zusammenfassung der Grundregeln

> Potenzrechnung geht vor Punktrechnung geht vor Strichrechnung, wenn eine Klammer keine andere Reihenfolge festlegt.
> Greift keine der Regeln, dann wird von links nach rechts gerechnet.

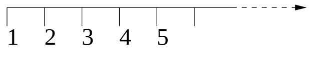
Aufgaben

A1. Berechne die folgenden Ausdrücke:

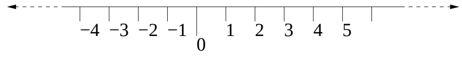
a)	$2 + 3 + 5$	b)	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$
c)	$8 \div 2 + 9 \div 3$	d)	$2^2 + 3^2$
e)	$4^2 \div 2^2$	f)	$(2 + 1)^3 - (2 + 3)^2$
g)	$2 \cdot (3 + 4)$	h)	$2 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (5 - 2)$
i)	$3 \cdot (12 - 7) - 2 \cdot (1 + 3)$	j)	$2 \cdot [(1 + 3) + (5 + 7)]$
k)	$3 \cdot [2 \cdot (12 - 5) - 3 \cdot (14 - 11)]$	l)	$3 \cdot (5 + (14 - (2 \cdot 11 - 10)))$

1.2 Die ganzen Zahlen

Oben wurde darauf hingewiesen, dass die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer 'geht'. Damit ist gemeint, dass manche Subtraktionen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen heraus führen würden, also nicht innerhalb dieser Zahlen berechnet werden können. In solchen Zusammenhängen wird in der Mathematik gerne ein Verfahren angewendet, bei dem der Bereich der Zahlen *erweitert* wird. Bei diesen Zahlbereichserweiterungen werden zu den bekannten Zahlen neue hinzu genommen. Dabei sollten möglichst alle Regeln, die für die 'alten' Zahlen galten auch für die neuen gelten, aber zusätzliche Möglichkeiten im Bereich der neuen Zahlen geschaffen werden.
Um nun die Subtraktion immer durchführbar zu machen, wird aus dem Zahlenstrahl, an dem die natürlichen Zahlen aufgereiht sind



eine Zahlengerade gemacht, indem der Zahlenstrahl nach links kopiert wird. In die Mitte zwischen diese Zahlen kommt noch die Null, die weder positiv noch negativ ist.



Die Menge der ganzen Zahlen, die mit '$\mathbb{Z}$' abgekürzt wird, ist also:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

[2] Mit Ausnahme vielleicht der Links-nach-Rechts Regel.
[3] Manchmal findet man auch 'aufgelöst'.

1.2.1 Der Absolutbetrag

Um den Zusammenhang zwischen einer Zahl und ihrer Gegenzahl fassen zu können, gibt es in der Mathematik den Begriff Absolutbetrag, oftmals einfach 'Betrag'. Er ist definiert als:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{sonst} \end{cases}$$

Um also den Betrag einer Zahl zu erhalten, schreibt man sie zwischen senkrechte Striche, die sogenannten Betragsstriche, aber wie wirkt er sich aus?
Betrachten wir zwei Beispiele:

3 Der Betrag von '3' wird $|3|$ geschrieben. Nun muss man schauen, was zwischen den Betragsstrichen steht. Hier ist es die 3, die größer als Null ist. Daher gilt die obere Zeile der Betragsdefinition und die Betragsstriche können einfach weggelassen werden, also: $|3| = 3$.

-3 Der Betrag von '-3' ist $|-3|$. Nun steht zwischen den Betragstrichen die Zahl '-3', die kleiner als Null ist, es kommt also die untere Zeile der Definition zur Anwendung. Damit ist dann aber: $|-3| = -(-3) = 3$.

Bei den Beispielen ergab sich, dass $|3| = |-3| = 3$ ist. Man kann den Betrag einer Zahl also auch als Abstand der Zahl von der 0 auf dem Zahlenstrahl verstehen.
Beträge können recht kompliziert werden, wenn zwischen den Betragsstrichen ein Term[4] steht, da das aber praktisch nicht mehr vorkommt, soll das auch hier nicht thematisiert werden.

1.3 Die rationalen Zahlen

Nun, mit Einführung der ganzen Zahlen 'geht' die Subtraktion immer, allerdings noch nicht die Division, die 'geht' erst dann immer, wenn man noch mehr Zahlen hinzu nimmt und zu den rationalen Zahlen über geht. Diese werden mit '$\mathbb{Q}$' bezeichnet, ihre Darstellung ist allerdings nicht mehr ganz so einfach, wie bei den natürlichen oder ganzen Zahlen. Genauer, es gibt **zwei** Darstellungsmöglichkeiten, die beide ihre Vor- und Nachteile haben.

Die Dezimalzahlen

Die Grundvoraussetzung für die Dezimalzahlen besteht darin, dass man jede ganze Zahl als Dezimalzahl schreiben kann. So sind etwa:

$$\begin{aligned} 2 &= 2,00000\ldots \\ -3 &= -3,00000\ldots \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen lassen sich dann Divisionen durchführen, die sonst nicht durchfürbar waren. Die folgende Division 'geht' bei den natürlichen Zahlen nicht:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & \div & 2 & =1 & 7 \quad R1 \\ 2 & & & & & \\ \cline{1-2} 1 & 5 & & & & \\ 1 & 4 & & & & \\ \cline{1-2} & 1 & & & & \end{array}$$

Geht man nun, wie oben davon aus, dass die vorkommenden Zahlen auch als Dezimalzahlen schreibbar sind, dann kann man die Division restlos durchführen, man muss nur bei Überschreiten des Kommas im Dividenden[5] auch im Ergebnis ein Komma einführen:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 5 & ,0 & \div & 2 & =1 & 7 \quad ,5 \\ 2 & & & & & & \\ \cline{1-2} 1 & 5 & & & & & \\ 1 & 4 & & & & & \\ \cline{1-2} & 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ \cline{2-3} & & 0 & & & & \end{array}$$

[4] Kommt noch!

[5] Na, wer weiß noch was das war?

Wer sich noch daran erinnert: Nun sind wieder Stellen da, die man noch zur Rechnung dazu holen kann, was bei den natürlichen Zahlen nicht der Fall war. Das ist soweit auch ganz praktisch und hat den Vorteil, dass man sich nicht umgewöhnen muss, alle Rechnungen gehen genau so wie bisher.
Leider hat die Sache einen kleinen Haken. Die Divisionen 'gehen' immer noch nicht alle. Es gibt Situationen, in denen die (schriftliche) Division nicht aufhört; eine periodische Dezimalzahl entsteht:

$$
\begin{aligned}
1 \div 3 &= 0,3333333\ldots \\
7 \div 333 &= 0,021021021021\ldots \\
1004 \div 4995 &= 0,201001001001001\ldots
\end{aligned}
$$

Man sieht, dass die Sache ziemlich kompliziert werden kann. Die sogenannte Periode kann aus einer Ziffer[6] bestehen, die immer wieder wiederholt wird, einer Zweier- oder Dreier- oder WasWeißIch-gruppe von Ziffern, die dann immer wieder wiederholt wird und das Ganze kann noch komplizierter werden, wenn erst ein Teil nach dem Komma folgt, der **nicht** periodisch ist und dann erst ein periodischer Teil folgt.
Nun in den meisten Fällen interessiert das wenig, denn insbesondere in Anwendungssituationen wird man sowieso runden[7]. Aber man mache sich klar, dass die Sache nicht ganz so einfach ist. Bei schriftlichen Addieren fängt man etwa üblicherweise mit der letzten Stelle/Ziffer an. Wenn es aber eine solche nicht gibt, tja, was dann?

1.3.1 Brüche

Zum Glück gibt es noch eine andere Darstellung für rationale Zahlen: Die Brüche[8]. Bei den Brüchen werden Zahlen einfach mit zwei Zahlen geschrieben, von denen eine, der sogenannte Zähler oberhalb und die andere, der sogenannte Nenner unterhalb eines sogenannten Bruchstrichs geschrieben werden. Nun 'gehen' alle Divisionen:

$$
\begin{aligned}
1 \div 3 &= \frac{1}{3} \\
7 \div 333 &= \frac{7}{333} \\
1004 \div 4995 &= \frac{1004}{4995}
\end{aligned}
$$

Man führt die Division also im eigentlichen Sinne nicht aus, sondern lässt einfach den Dividenden oben und den Divisor unten stehen und das war es schon. Leider ist das Rechnen mit Brüchen etwas, was bei vielen Menschen immer noch zu Problemen führt, auch wenn ich mit Fug und Recht behaupten kann, dass es eigentlich deutlich einfacher ist, als mit Dezimalzahlen[9] Eine komplette Einführung in die Bruchrechnung würde hier sicherlich zu weit führen, daher nur ein kleiner Überblick:

1.3.1.1 Kürzen und erweitern

Etwas, was es bei anderen Zahldarstellungen nicht gibt, ist das Kürzne und Erweitern. Beim Kürzen werden Zähler und Nenner eines Bruches durch die gleiche Zahl dividiert:

$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

Der Wert dieser Zahl ändert sich dabei nicht. Für beide Zahlen gilt:

$$\frac{6}{15} = 0,4 \qquad \frac{2}{5} = 0,4$$

Beim Erweitern werden Zähler und Nenner des Bruches mit der gleichen Zahl multipliziert. Auch hier ändert sich der Wert nicht:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20} = 0,4$$

[6] Eine Zahl besteht aus Ziffern. Die Zahl 123 besteht aus den Ziffern '1', '2' und '3'.
[7] Wie das geht fragt ihr am besten euren Mathelehrer!
[8] Nein, ich möchte nicht geschlagen werden!
[9] Vor allem etwa bei der sogenannten 'quadratischen Ergänzung', aber auch in vielen anderen Fällen sind Brüche einfach praktischer!

1.3.1.2 Addieren und subtrahieren von Brüchen

Zwei Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht[10] und dann die Zähler addiert und den (dann gleichen) Nenner beibehält:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Da ich ja schon darauf hingewiesen habe, dass sich schon bei den ganzen Zahlen die Subtraktion immer als Addition schreiben lässt, dürfte klar sein, dass die Subtraktion genau so erfolgt.

1.3.1.3 Multiplizieren und dividieren von Brüchen

Das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen ist einfacher als die Addition oder Subtraktion, weil man hier auf Erweitern und Kürzen verzichten kann.
Ein Bruch wird mit einem zweiten multipliziert, indem man einfach Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner rechnet[11]:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Die Division ist genau so einfach: Ein Bruch wird durch einen zweiten dividiert, indem man den ersten mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert.
Der Kehrwert, oder Kehrbruch, wie manche sagen, ist der Bruch, den man erhält, wenn man Zähler und Nenner vertauscht. '$\frac{2}{7}$' hat also den Kehrwert: '$\frac{7}{2}$'. Mit diesem Wissen ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

1.3.1.4 Eine Schlussbemerkung zu Brüchen

Manche total veralteten Schulbücher (und Lehrer) neigen dazu Zahlen, wie das letzte Ergebnis von '$\frac{3}{2}$' als sogenannte *gemischte Zahl* zu schreiben. Dazu wird der Zähler so lange durch den Nenner geteilt, bis bei der Dezimalschreibweise ein Komma erforderlich wäre. Das Ergebnis stellt den Anfang der gemischten Zahl dar, und der Divisionsrest wird zum neuen Zähler des Bruchs mit immer noch dem gleichen Nenner. Wem das zu kompliziert war:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Diese Schreibweise ist **des Teufels!!!!** und absolut **zu vermeiden!!!!**[12] Also Merkregel: Gemischte Zahlen sind **bah!** Wolln wir nicht![13]

1.4 Die reellen Zahlen

Nun ist es fast geschafft, was die Schule angeht, sind nun beinahe alle Zahlen bekannt, allerdings kommen zu den rationalen Zahlen noch die irrationalen Zahlen, die zusammen dann die sogenannten reellen Zahlen ergeben.
Was sind nun diese irrationalen Zahlen, die noch zu den rationalen hinzukommen. Einfach gesagt sind dass alle Zahlen, die:

1. sich als Dezimalzahlen schreiben lassen, dabei aber
2. unendlich viele Nachkommastellen haben und
3. **nicht** periodisch sind.

---

[10] Das bedeutet, dass man sie so erweitert oder kürzt, dass sie den gleichen Nenner haben. Siehe folgendes Beispiel.

[11] Hier zeigt sich schon die Einfachheit von Brüchen. Die Berechnung des Zählers ist unabhängig von der des Nenners. Man muss nur einfach zwei (natürliche) Zahlen miteinander multiplizieren. Versuchen sie das mal mit zwei periodischen Dezimalzahlen — Viel Spaß!

[12] Unter anderem daher, dass normalerweise immer dann, wenn zwischen zwei mathematischen Ausdrücken nichts steht, dort ein Multiplikationszeichen erwartet wird. Nur bei gemischten Zahlen ist es ein (unsichtbares und daher ungleich gefährlicheres) Pluszeichen.

[13] Sollte irgendjemand in ihrer Nähe die Nutzung von gemischten Zahlen von ihnen verlangen, rufen sie dezent die 112 an. Dort wird man sich darum kümmern, dass die entsprechende Person, bekleidet mit einer Jacke, die sich nur von hinten öffnen und schließen lässt und die darüber hinaus die Bewegungsfreiheit der Arme und Hände stark einschränkt, in einem gemütlichen Raum mit sehr weichen Wänden wieder findet!

Hört sich kompliziert an, nun hier ein paar Beispiele:

$$0,12345678910111213\ldots$$
$$0,1010010001000010000001\ldots$$
$$0,246810121416182022\ldots$$

mit ein bisschen Überlegung kommt man sicher darauf, wie die obigen Zahlen gebildet wurden und dann wird auch klar, dass sie unendlich viele Nachkommastellen haben, ohne dass sich die Nachkommastellen irgendwann wiederholen. Es sind eben irrationale Zahlen.
Die reellen Zahlen, also die rationalen zusammen mit den irrationalen Zahlen werden mit '$\mathbb{R}$' bezeichnet und für den schulischen Bereich genügt es sich vorzustellen, dass das *alle* Zahlen wären[14]
Auch die reellen Zahlen kommen **streng** genommen in der Schule nicht vor, da man dort zumeist mit (rationalen) Rundungen der irrationalen Zahlen arbeitet[15] Das gilt natürlich ganz besonders im Sachzusammenhang, wo zu viele Nachkommastellen oftmals mehr schaden als nutzen[16]
Wozu braucht man denn nun die irrationalen Zahlen? Nun *manche* von ihnen kommen eben doch in der Schule vor, wobei sie allerdings in der Regel nicht ausgeschrieben werden[17] sondern durch bestimmte Symbole bezeichnet werden. Zu diesen Zahlen, die in der Schule vorkommen, gehören auf jeden Fall mal die sogenannte Kreiszahl π[18], die für Berechnungen von Kreisen und Kreisteilen gebraucht wird. Für sie gilt (ungefähr):

$$\pi \approx 3.141592653589793\ldots$$

Ebenfalls recht häufig kommt die sogenannte Eulersche Zahl 'e' vor.. Sie wird vor allem als Basis von Wachstumsfunktionen genutzt, die natürliche Wachstumsvorgänge beschreiben. Ihr Wert ist ungefähr:

$$e \approx 2.718281828459045\ldots$$

Die weitaus größte Gruppe von irrationalen Zahlen, die in der Schule vorkommen, sind allerdings die

1.4.1 Wurzeln

Die Wurzeln stellen in gewisser Hinsicht eine Umkehrung des Potenzierens dar[19]. Betrachtet man einmal die Gleichung:

$$3^2 = 9$$

dann fordert der linke Teil dieser Gleichung dazu auf die '3' mit sich selbst zu multiplizieren (was dann die '9' ergibt). Man könnte nun auch die Frage stellen wie man nicht von der '3' zur '9' kommt, sondern eben umgekehrt: Wie kommt man von der '9' wieder zur '3' und da kommen die Wurzeln ins Spiel, denn es ist:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{oder} \quad \sqrt[2]{9} = 3$$

Allgemein ausgedrückt bezeichnet '$\sqrt{a}$' die nicht-negative[20] Zahl, deren Quadrat 'a' ergibt. Es ist also: $\sqrt{a}^2 = a$.
Das gilt auch für andere Potenzen. So gibt etwa: '$\sqrt[3]{a}$' diejenige (nicht-negative) Zahl an, die **dreimal** mit sich selbst multipliziert a ergibt. Zum Beispiel:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{denn} \quad 4^3 = 64$$

Aus diesem Grund habe ich oben auch das '$\sqrt{a}$' als '$\sqrt[2]{a}$' geschrieben, nur bei der sogenannten zweiten Wurzel oder auch Quadratwurzel schreibt man die '2' im Allgemeinen nicht hin.

---

[14] Es gibt noch sogenannte 'komplexe Zahlen', aber die kommen im schulischen Bereich nicht vor.

[15] Taschenrechner können gar nicht anders. Da der Speicher (und die Anzeige) von Zahlen im Taschenrechner begrenzt ist, können diese keine Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastelle enthalten.

[16] Stellen sie sich mal vor, sie wollten ein Brett mit der Länge von 1,2873562292837m haben - man würde sie für verrückt halten.

[17] Was als Dezimalzahl auch gar nicht ginge.

[18] Dies ist ein griechischer Buchstabe, der 'Pi' ausgesprochen wird.

[19] Ganz so einfach ist es nicht, denn Potenzen kennen zwei Umkehrungen, die Wurzeln und die Logarithmen, die später behandelt werden.

[20] Also eine positive Zahl oder die Null.

Eine letzte Bemerkung zu den Wurzeln. Was haben die denn nun mit den irrationalen Zahlen zu tun? Alle bisher beschriebenen Beispiele kamen sogar mit natürlcihen Zahlen aus, sogar das letzte Beispiel mit der dritten Wurzel.
Der Grund dafür ist, dass die allermeisten Wurzeln (egal ob Quadratwurzeln oder Wurzeln höherer Ordnung) eben **keine** rationalen Zahlen sind sondern irrationale, so ist etwa:

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095\ldots$$

eine irrationale Zahl. Das gilt nochfür sehr viele andere Zahlen!

1.5 Noch mal Potenzen

Die Potenzen wurden ja schon einmal bei den Rechenarten für die natürlichen Zahlen vorgestellt und dort wurde darauf hingewiesen, dass manche Aspekte dieser Potenzen nicht innerhalb der natürlichen Zahlen vorgestellt werden können. Genauer: Dort konnte noch nicht darauf eingegangen werden, was passiert, wenn der Exponent eine negative Zahl ist oder eine rationale. Nun, nachdem wir die ganzen und die rationalen Zahlen nun kennen, kann das nachgeholt werden.
Zunächst einmal die wichtigste Regel überhaupt: Auch wenn es bei rein natürlichen Exponenten einen Sinn machen kann, ist es in allen anderen Fällen nicht möglich in der Basis eine negative Zahl zu haben.

1.5.1 Negative Exponenten

Bei negativen Exponenten ist es einfach aus dem negativen Exponenten einen positiven zu machen. Man muss dabei einfach gleichzeitig den Kehrwert der Basis bilden, dann ist alles in Ordnung:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

In gewissem Sinne macht man also aus einer Multiplikation eine Division. Hier ein paar Beispiele:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$$

1.5.2 Rationale Exponenten

Handelt es sich bei dem Exponenten um einen sogenannten Stammbruch, das sind Brüche, deren Zahler eine '1' ist, dann sind diese Potenzen eine andere Schreibweise für (höhere) Wurzeln, stellen also einfach eine andere Schreibweise dar:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$$
$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Handelt es sich um einen 'echten' Bruch, dann kann man den Zähler als einfache Potenz ansehen und den Nenner dann als 'Grad' der Wurzel. Es ist dabei unerheblich, ob man erst die Wurzel zieht und dann potenziert oder umgekehrt:

$$9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = \sqrt[2]{9^3} = 27$$

1.6 Rechenregeln für Zahlen

Zunächst einmal bedeuten die ganzen Zahlen, dass nun alle Subtraktionen 'gehen'. Bei den natürlichen Zahlen wird die Subtraktion ja dadurch dargestellt, dass man auf dem Zahlenstrahl nach links geht. Da der Zahlenstrahl nun zu einer Zahlengeraden erweitert wurde, kann man weiter 'nach links' gehen, als vorher. Die Rechnung

$$5 - 7$$

bedeutet ja nur, dass man von der '5' auf dem Zahlenstrahl um 7 Einheiten nach links gehen soll. Das ist nun möglich und man erreicht die '-2', also

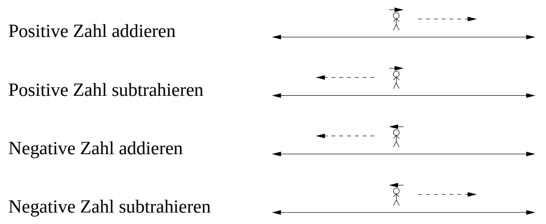
$$5 - 7 = -2$$

1.6.1 Addition statt Subtraktion

Da aber auch die Addition einer negativen Zahl das Gleiche bedeutet, wie bei den natürlichen Zahlen die Subtraktion, kann mit Einführung der ganzen Zahlen auf die Subtraktion verzichtet werden, so ist etwa:

$$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$$

Statt also eine natürliche Zahl zu subtrahieren, kann nun auch eine negative Zahl[21] addiert werden. Es gibt ein kleines Bild, was die Addition und Subtraktion von Zahlen schön darstellt: Positive Zahlen 'schauen' nach rechts, negative Zahlen nach links. Mit dieser Vorstellung bedeutet Addition immer eine Bewegung in Blickrichtung und Subtraktion eine Bewegung gegen die Blickrichtung.



1.6.2 Multiplikation und Division von Zahlen

Mag es für die Addition und Subtraktion der Zahlen noch anschauliche Beispiele geben, so gilt das nicht mehr für die Multiplikation oder Division! Hier hilft nur noch auswendig lernen:

> Plus **mal/durch** Plus=Plus
> Plus **mal/durch** Minus=Minus
> Minus **mal/durch** Plus=Minus
> Minus **mal/durch** Minus=Plus

1.6.2.1 Die einfachen Regeln

Die allereinfachste Regel, die es gibt, kommt dann zur Geltung, wenn keine Regel zur Anwendung kommt:

> Im Normalfall wird immer von links nach rechts gerechnet

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 5 + 7 &= 6 + 5 + 7 \\ &= 11 + 7 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Diese 'Regel' kommt immer dann zur Anwendung, wenn nur gleiche Rechnungen in einer mehrgliedrigen Rechnung vorkommen[22]. Sie gilt für die Addition (s.o.), aber genau so auch für die Multiplikation:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &= 6 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 24 \cdot 5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Von dieser 'Regel' wird abgewichen, wenn mehr als eine Rechenart in einer mehrgliedrigen Rechnung vorkommen. Dann gilt die gute alte Regel:

Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Was nichts anderes bedeutet, als dass die Multiplikation und die Division ausgeführt werden müssen **bevor** addiert und/oder subtrahiert wird. Es ist also:

[21] Man nennt diese Zahl dann auch oft 'Gegenzahl'.
[22] Mehrgliedrig heißt eine Rechnung dann, wenn mehr als zwei Zahlen in ihr vorkommen.

$$\begin{aligned} 2+3\cdot4-5\cdot6-8\div2 &= 2+12-30-4 \\ &= 14-30-4 \\ &= -16-4 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Aber Achtung, diese Regel müsste eigentlich erweitert werden. Zum einen ist die unvollständig, was die Klammersetzungen angeht und dann fehlt noch die Potenzrechnung[23]. Vollständig müsste sie heißen:

> Potenzrechnung kommt vor Punkt- kommt vor Strichrechnung, wenn eine Klammer nichts anderes vorschreibt!

1.6.2.2 Die 'schwierigen' Regeln

Nun, die nun folgenden Regeln sind zwar nicht wirklich schwierig, aber spätestens dann, wenn Variablen ins Spiel kommen, sind sie dann leider doch nicht mehr so selbstverständlich, wie es sich hier noch anhören wird.
Das erste Gesetz, das für die Addition genauso wie für die Multiplikation gilt, ist das **Assoziativitẗsgesetz**[24] besagt, dass man sich bei der Addition und der Multiplikation nicht unbedingt an die 'Von-links-nach-Rechts'-Regel halten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} a+b+c &= a+(b+c) \\ a\cdot b\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$

Also anstatt erst 'a' und 'b' miteinander zu addieren/multiplizieren, kann man auch erst 'b' und 'c' miteinander addieren oder multiplizieren. In manchen Situationen kann das sinnvoll sein[25]:

$$\begin{aligned} 7+8+2 &= 7+(8+2) \\ &= 7+10 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,2\cdot20\cdot0,5 &= 1.2\cdot(20\cdot0.5) \\ &= 1,2\cdot10 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Das zweite Gesetz ist das Kommunikativgesetz[26]. Es besagt, dass bei einer Addition oder Multiplikation die Summanden/Faktoren vertauscht werden dürfen. Formal sieht das dann so aus:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$

Und in einem Beispiel:

$$\begin{aligned} 10+2 &= 2+10 \\ 3\cdot4 &= 4\cdot3 \end{aligned}$$

In einer so einfachen Situation bringt das Kommunikationsgesetz relativ wenig. Bei Variablen sieht die Sache dann schon anders aus, aber auch bei mehrgliedrigen Rechnungen kann es Vorteile bringen:

[23] Kommt noch!
[24] Im Deutschen auch 'Verbindungs-' oder 'Verknüpfungsgesetz' genannt.
[25] Die im Beispiel verwendeten Dezimalzahlen kommen gleich!
[26] Im Deutschen: Vertauschungsgesetz!

$$\begin{aligned} 5+7+15 &= 5+15+7 \\ &= 20+7 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Das dritte und letzte Gesetz dieser Art ist das Distributivgesetz[27]. Es ist das einzige, was sich auf Addition **und** Multiplikation bezieht und die Relation zwischen diesem beiden Rechenarten ausdrückt. Formal heißt es:

$$\boxed{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Vermutlich ist dieses Gesetz bekannt, aber es kommt immer wieder zu Schwierigkeiten bei Anwendung dieses Gesetzes, daher auch hier erst mal ein Beispiel, bei dem auf der linken Seite **ohne** Anwendung des Gesetzes und auf der rechten **mit** Anwendung des Gesetzes gerechnet wird:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3+4) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 7 &= 6+8 \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

Offenbar führen beide Rechenwege zum gleichen Ergebnis. Trotzdem ist das Gesetz ein wenig befremdlich. Betrachtet man die formale Form, dann fällt auf, dass auf der linken Seite nur **ein** 'a' vorkommt, während es auf der rechten Seite **zwei** 'a's' sind.
Ich finde es immer am einfachsten, wenn man sich das Gesetz an einem einfachen Beispiel klar macht. Der Ausdruck:

$$2 \cdot (2a + 3b)$$

kann folgendermaßen interpretiert werden: In einer Tüte (die Klammern) befinden sich 2 Äpfel ('$2a$') und drei Birnen ('$3b$'). Von diesen Tüten hat man **zwei**[28]!!! Wenn man nun wissen will, wieviele Äpfel und Birnen man insgesamt hat, dann kann man einfach beide Tüten ausleeren und zählen, was vier Äpfel und sechs Birnen ergibt. Oder aber, man multipliziert den Inhalt der Tüte mit 2, was dann zum selben Ergebnis führt: Zweimal zwei Äpfel (ergibt vier Äpfel) und zweimal drei Birnen, was sechs Birnen ergibt. Und schon stimmt die Welt wieder.

1.7 Fachbegriffe

Addition

Die Addition, Zeichen: '+', ist die Rechnung in einer Summe.

Basis

Eine Basis ist eine Zahl, der ein Exponent zugestellt wird. Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden soll.

Differenz

Eine Differenz besteht aus einem Minuenden, von dem ein Subtrahend abgezogen oder subtrahiert wird.

Dividend

Ist in einer Division oder einem Quotienten die Zahl, ddie vom *Divisor* geteilt wird.

Division

Die Division, Zeichen: '$\div$', ist die Rechnung in einem Quotienten.

Divisor

Ist die Zahl, durch die in einer Division oder einem Quotienten geteilt wird.

Exponent

Der Exponent, der oberhalb der sogenannten Basis geschrieben wird, gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden soll.

[27] Im Deutschen: Verteilungsgesetz.

[28] Eine in der linken Hand und eine in der rechten.

Faktor

Ein Faktor ist eine Zahl, die in einem Produkt vorkommt. Bei einem Produkt werden immer zwei Faktoren miteinander multipliziert.

Minuend

Der Minuend ist die Zahl innerhalb einer Differenz von dem der Subtrahend abgezogen oder subtrahiert wird.

Multiplikation

Die Multiplikation, Zeichen: '$\cdot$' oder manchmal auch '$\times$', ist die Rechnung in einem Produkt.

Potenz

Eine Potenz ist eine Zahl, die sich ergibt, wenn man eine Basis so oft, wie durch den Exponenten angegeben, mit sich selbst multipliziert.

Produkt

Ein Produkt besteht aus zwei *Faktoren*, die durch einen Multiplikationspunkt ('$\cdot$') miteinander verbunden sind. Das Ergebnis dieser Rechnung wird Wert des Produkts genannt.

Quotient

Ein Quotient besteht aus einem Dividenden und einem Divisor, wobei der Dividend durch den Divisor geteilt wird.

Subtrahend

In einer Differenz wird von einem Minuenden der Subtrahend subtrahiert oder abgezogen.

Subtraktion

Die Subtraktion, Zeichen: '$-$', ist die Rechnung in einer Differenz.

Summand

Ein Summand ist Teil einer Summe. Zwei Summanden mit einem Pluszeichen dazwischen ergeben eine Summe.

Summe

Eine Summe besteht aus zwei *Summanden*, die durch ein Pluszeichen miteinander zu einer Summe verbunden werden. Das Ergebnis dieser Rechnung heißt: Wert der Summe.

Keine Panik!

2 Variablen und Terme

2.1 Variablen

Variablen sind einfache Platzhalter für Zahlen. Vielleicht erinnern sie sich noch an Aufgaben der Art:

$$3 + \underline{\quad} = 7$$

Sie wurden gelesen: *3 plus Platzhalter gleich 7.* Und genau das gleiche, was dieser Strich in der obigen Rechnung leistet, schafft auch eine Variable.
Der Unterschied zwischen einem Platzhalter aus der Grundschule und einer Variablen besteht im Prinzip nur aus der Schreibweise und einer flexibleren Einsatzmöglichkeit.
Geschrieben werden Variablen üblicherweise als Kleinbuchstaben: a, b, c. Manchen Variablen kommt 'traditionellerweise' oft eine bestimmte Bedeutung zu. x und y gehören dazu[1], aber auch n, was oftmals einfach nur irgendeine natürliche Zahl meint.
Der Vorteil von Variablen gegenüber Platzhaltern ergibt sich sofort, wenn man sich überlegt, dass es ja auch mal eine Aufgabe geben könnte, in der mehr als ein Platzhalter nötig wäre. Wie sollte man die unterscheiden?
In dem Term

$$a \cdot (a + b)$$

gibt es zwei Variablen die an drei Variablenstellen stehen. Durch die Verwendung der Variablen 'a' und 'b' ist sofort klar, dass an den Stellen unmittelbar an der öffnenden Klammer ('a') die gleichen Zahlwerte hingehören, während hinter dem Pluszeichen ('b') auch eine andere Zahl stehen kann.

2.2 Terme

Ein Term ist jede sinnvolle Zusammensetzung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen. Dabei bedeutet 'sinnvoll', dass nach Ersetzung jeder Variablen durch eine Zahl[2] ein Ausdruck entsteht, der sich zu einer Zahl zusammenfassen lässt. So ist etwa:

$$a \cdot (a + b)$$

ein Term, denn ersetzt man a etwa[3] durch 1 und b durch 2, dann ergibt sich: $1 \cdot (1 + 2)$, was man einfach zu 3 zusammenfassen kann[4]. Hin gegen ist:

$$a + +($$

kein Term, denn ersetzt man hier die Variable a etwa duch 1, dann ergibt sich: $1 + +($ und das lässt sich **nicht** zu einer Zahl zusammenfassen.
Es gibt Sonderfälle! So kann es Ausdrücke geben, die bei der Ersetzung der Variablen durch Zahlen in manchen Fällen eine Zahl ergeben und in manchen auch nicht. Auch hierzu ein Beispiel. In den Ausdruck:

$$\frac{1}{1 + x}$$

kann man für x viele Zahlen einsetzen und es ergibt sich dann eine Zahl, also zum Beispiel, wenn man für x die Zahl 5 einsetzt:

$$\frac{1}{1 + 5} = \frac{1}{6}$$

Man kann allerdings nicht jede beliebige Zahl an der Stelle von x einsetzen, zum Beispiel die '-1' nicht, denn dann würde sich ergeben:

$$\frac{1}{1 + (-1)} = \frac{1}{0}$$

---

1 Vor allem bei Funktionen.

2 Dabei sollten alle Variablen, die gleich 'heißen' auch durch die gleiche Zahl ersetzt werden.

3 Tatsächlich kann man an Stelle einer Variablen jede Zahl einsetzen. Was es bedeutet den Wert einer Variablen zu ermitteln, wird im Kapitel über Gleichungen besprochen.

4 Nach den Rechenregeln für Zahlen, die ja schon beschrieben worden sind.

Die Division durch Null ist allerdings nicht definiert, was nichts anderes bedeutet, als dass man bei der Division durch Null keinen sinnvollen Zahlwert angeben kann[5].
Kommt so ein Fall vor, dann spricht man dennoch von einem Term. Allerdings ist seine sogenannte Definitionsmenge eingeschränkt. Das ist die Menge an Zahlen, die in einen Term eingesetzt werden kann, so dass sich eine Zahl ergibt. Im obigen Falle wären es alle Zahlen bis auf die '-1'.
Will man einem Term einen '*Namen*' geben[6], dann wählt man in der Regel Großbuchstaben. In Klammern dahinter wird angegeben, welche Variablen der Term enthält. So ließe sich das erste Beispiel auch als:

$$T_1(a, b) = a \cdot (a + b)$$

schreiben.
Die Zahl, die sicher ergibt, wenn man in einem Term alle Variablen durch Zahlen ersetzt hat, heißt: 'Wert des Terms'[7]. So hatte der erste Term für $a = 1$ und $b = 2$ den Wert: 3. Man kann auch schreiben:

$$\begin{aligned} T_1(1, 2) &= 1 \cdot (1 + 2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Aufgaben

A2. Gegeben ist ein Term durch: $T(a) = 2 \cdot a + 3$. Berechne den Wert des Terms für $a = 1, a = -1, a = 2, a = 3, a = 10$ und $a = 20$.

A3. Gegeben ist ein Term durch $T(x) = x \cdot (x + 1)$. Berechne die Termwerte für $x = 1, 2, 3, -5, 10$ und 100

A4. Gegeben ist ein Term mit: $T(x) = x^2 + 3x - 1$. Berechne die Werte des Terms für $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$, $x = -5$ und $x = 10$.

A5. Gegeben ist ein Term mit: $T(a, b) = a(a + 2 \cdot b)$. Berechne die Werte des Terms für: $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$ und $(-5; 12)$. Die jeweils erste Zahl steht dabei für 'a' und die zweite für 'b'.

A6. Gegeben ist jeweils eine Tabelle mit Werte für die Variable x und dem dazu gehörenden Wert eines Terms, der nur von x abhängt. Überlege, welcher Term zu der jeweiligen Tabelle passen könnte[8].

a)

x	1	2	3	4	5
Wert des Terms	2	6	12	20	30

b)

x	1	2	3	4	5
Wert des Terms	3	5	7	9	11

c)

x	1	2	3	4	5
Wert des Terms	0	3	8	15	24

2.2.1 Schreibweisen

In Termen stoßen Zahlen und Variablen aufeinander, wobei Variablen natürlich prinzipiell ebenfalls nur für Zahlen stehen. Dennoch haben sich ein paar Konventionen eingebürgert, die das Leben ein bisschen leichter machen.

2.2.1.1 Multiplikationspunkt

In fast allen Fällen kann der Multiplikationspunkt weggelassen werden. Er ist nur dann nötig, wenn zwei Zahlen miteinander multipliziert werden.

> Steht zwischen zwei Ausdrücken in einem Term 'nichts', dann steht dort ein Multiplikationspunkt!

Diese Regel gilt zwischen zwei Variablen, einer Zahl und einer Variablen sowie vor einer Klammer. Im folgenden werden einige 'vollständige' Terme angegeben, gefolgt von ihrer Kurzschreibweise:

[5] Chuck Norris kann natürlich durch Null teilen!
[6] Was in der Realität allerdings nur sehr selten vorkommt.
[7] Dieser Ausdruck ist ein bisschen irreführend, weil es einen Wert des Terms nicht gibt. Dieser ist immer davon abhängig, welche Zahlen man für die Variablen ausgesucht hat.
[8] Diese Aufgabe lässt sich nicht eindeutig lösen, da zu den Tabellen prinzipiell beliebig viele Terme denkbar sind! Trotzdem sollte es möglich sein zumindest einen davon zu identifizieren.

$$2 \cdot a = 2a$$
$$a \cdot b = ab$$
$$3 \cdot (x+1) = 3(x+1)$$
$$a \cdot (b + 2 \cdot a) = a(b + 2a)$$

2.2.1.2 Multiplikation mit 1

Wird eine Variable mit der Eins multipliziert, so kann diese Eins in aller Regel weg gelassen werden. So schreibt man statt: $1x$ vereinfacht nur x.

2.2.1.3 Ein Bruchstrich wirkt wie eine Klammer

Auch wenn es sich dabei nicht im engeren Sinne um eine Schreibweise handelt, sollte hier dennoch darauf hingewiesen werden, dass ein Bruchstrich immer auch Klammern ersetzt. So ist etwa:

$$\frac{x+1}{x-1} = (x+1) \div (x-1)$$

Es wird also immer der **ganze** Zähler durch den **ganzen** Nenner dividiert!

2.2.1.4 Reihenfolge bei Produkten

Besteht ein Term (oder ein Teil eines Terms) aussschließlich aus Produkten, dann gilt für diese das Kommutativgesetz, was in diesem Fall bedeutet, dass die einzelnen Faktoren des Produkts beliebig getauscht werden können. Es hat sich dabei als nützlich erwiesen[9] die folgende Reihenfolge einzuhalten:

> Erst die Zahl, dann die Variablen in alphabetischer Reihenfolge.

Auch hier ein paar Beispiele. Wieder stehen links die 'ungeordneten' und rechts die 'geordneten Terme:

$$2ba = 2ab$$
$$x \cdot 3y = 3xy$$
$$2c3b4a = 24abc$$

Im letzten Beispiel kamen in der ungeordneten Version drei Zahlen vor. Man hätte also in einem Zwischenschritt auch notieren können: $2c3b4a = 2 \cdot 3 \cdot 4abc$[10]. Das Teilprodukt: $2 \cdot 3 \cdot 4$ kann man aber auch sofort ausrechnen, so dass nur eine Zahl übrig bleibt.

2.2.2 Klassifikation von Termen

Terme lassen sich in unterschiedliche Kategorien einordnen und es ist in vielen Zusammenhängen[11] sehr sinnvoll dies auch zu tun — anderenfalls kommt man oft schlicht nicht mehr weiter.
Zunächst einmal muss unterschieden werden, ob ein Term eine Rechnung enthält oder nicht. Auch dann, wenn er gar keine Rechnung enthält, handelt es sich um einen Term. So hat etwa der Ausdruck:

$$3$$

nach Ersetzung aller Variablen durch Zahlen, die hier garn icht vorkommen, den Wert 3. Da er sich letztlich zu einer Zahl zusammenfassen lässt, ist es nach der Definition von Termen auch ein Term.

> Besteht ein Term nur aus einer Zahl, dann handelt es sich um einen **Zahlterm**.

Auch der Ausdruck:

$$x$$

9 Außer in Sonderfällen.

10 Hier ist der Multiplikationspunkt notwendig, da Zahlen miteinander multipliziert werden!

11 Zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen, aber auch bei der Frage nach der korrekten Ableitungsregel.

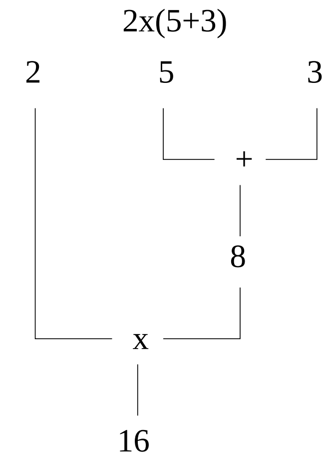
ist ein Term, denn wenn man das 'x' durch eine Zahl ersetzt, dann bleibt eben nur diese Zahl übrig.

> Enthält ein Term nur eine Variable, dann handelt es sich um einen **Variablenterm**.

Anders sieht die Sache aus, wenn in einem Term auch Rechnungen vorkommen. Die Reihenfolge, in der diese Rechnungen durchgeführt werden müssen, ist durch einige Regeln festgelegt, wie etwa die Regel: 'Punktrechnung vor Strichrechnung'.
Aus dieser Feststellung folgt, dass es immer **eine** Rechnung gibt, die als letzte durchgeführt werden muss[12]. Diese letzte Rechnung bestimmt die Art des Terms und in vielen Fällen auch seine Bezeichnung.

> Ist die letzte Rechnung in einem Term eine Addition, dann handelt es sich um einen **Summenterm** oder einfacher eine Summe.
> Ist die letzte Rechnung in einem Term eine Subtraktion, dann handelt es sich um einen **Differenzterm** oder eine Differenz.
> Ist die letzte Rechnung in einem Term eine Multiplikation, dann handelt es sich um einen **Produktterm** oder ein Produkt.
> Ist die letzte Rechnung in einem Term eine Division, dann handelt es sich um einen **Quotiententerm** oder einen Quotienten.

Vielleicht erinnern sie sich ja noch an die sogenannten 'Rechenbäume', wie sie in der Grundschule verwendet wurden. Ein solcher Rechenbaum konnte vielleicht so aussehen:



Die hier dargestellt Rechnung: '2(5+3)' zeigt deutlich, dass die Multiplikation zuletzt durchgeführt werden muss. Es handelt sich also um einen Produktterm. Der Grund dafür, dass die Strichrechnung **vor** der Punktrechnung durchgeführt wird liegt hier an den Klammern.
Die Klassifikation von Termen gilt auch für höhere Rechenarten, so gibt es etwa auch Wurzelterme, Logarithmusterme, Potenzterme. Die Frage, um welchen Term es sich handelt wird aber immer durch die letzte Rechenoperation beantwortet.

Aufgaben

A7. Klassifizieren sie die folgenden Terme

a)	$2+x$	b)	$2x-7$	c)	2
d)	$a+b+c$	e)	$a+b-c$	f)	$\frac{x-1}{x+1}$
g)	$3\frac{2}{x-1}$	h)	$(a+3)\div(a-3)$	i)	x

2.3 Fachbegriffe

[12] Im Falle, dass ein Term nur eine Rechnung enthält, ist diese natürlich automatisch die letzte.

Variable

Platzhalter für eine Zahl. Innerhalb eines Zusammenhangs, wie etwa einer Aufgabe, steht dabei eine Variable (ein Kleinbuchstabe) für einen Zahlwert.

Term

Jede sinnvolle Zusammensetzung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen. Sinnvoll ist die Zusammensetzung dann, wenn nach Ersetzung aller Variablen durch Zahlen eine berechenbare Zahl übrig bleibt.

Keine Panik!

3 Termumformungen

3.1 Gleichwertige Terme

Zwei Terme sind dann und nur dann gleich, wenn sie in allen Punkten genau gleich sind, also z.B.:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x_1}{x-1}$$

Nun kann es aber auch Terme geben, die nicht gleich sind, etwa: $T_1(x) = x + 2(x+1) - 1$ und der Term: $T_2(x) = 3x + 1$. Aber obwohl diese beiden Terme nicht gleich sind, ergibt sich beim Einsetzen von Zahlen für die Variable x etwas seltsames:

x	-2	1	3	5	10
T_1	-5	4	10	16	31
T_2	-5	4	10	16	31

Die Zahlen, die hier für 'x' eingesetzt wurden, waren vollkommen zufällig gewählt. Aber auch wenn man andere Zahlen nimmt, ergibt sich bei T_1 und T_2 immer der gleiche Wert des Terms.

> Ergeben sich bei Ersetzung der Variablen durch die gleiche Zahl in zwei Termen **immer** der gleiche Wert, dann heißen diese Terme gleichwertig!

3.2 Grundlage der Umformungen

Wie man sich vermutlich schon denken konnte, geht es in der Mathematik oftmals darum einen Term in einen einfacheren Term umzuwandeln und dabei aber darauf zu achten, dass die Terme dabei gleichwertig bleiben.
Grundlage für die Umwandlung eines Terms in einen (einfacheren) anderen, aber gleichwertigen Term sind dabei immer die schon bekannten Rechengesetze: **Kommutativgesetz**, **Assoziativgesetz** und das **Distributivgesetz**. Der Vollständigkeit halber seien sie hier noch einmal angeführt:

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \qquad ab = ba$$

Assoziativgesetz

$$a + b + c = a + (b + c) \qquad abc = a(bc)$$

Distributivgesetz

$$a(b + c) = ab + ac$$

Auch wenn sich das zunächst erst einmal sehr einfach anhört, liegen die Schwierigkeiten, wie so oft im Leben, im Detail. Im folgenden Kapitel werden daher alle Arten von Termumformung einzeln vorgestellt und erklärt.

3.3 Addition und Subtraktion gleicher Variablen

Gleiche[1] können mit Addition und Subtraktion zusammen gefasst werden. Am einfachsten erklärt man das mit einem Beispiel:

$$\begin{aligned} 2a + 5a &= a(2+5) && \text{Nach dem Distributivgesetz} \\ &= a \cdot 7 && \text{Einfache Zahlenrechnung} \\ &= 7a && \text{Nach dem Kommutativgesetz} \end{aligned}$$

Auch wenn man *eigentlich* die Rechengesetze dazu braucht, kann man sich im '*Alltagsleben*' die Sache auch etwas einfacher machen, in dem man sich die Variablen als '*sprechende*' Variablen

[1] Allerdings wirklich nur bis ins letzte gleiche Variablen

denkt. Das 'a' im obigen Beispiel könnte auch für Apfel oder Äpfel stehen und dann wird aus dem Term: Zwei Äpfel plus fünf Äpfel sind sieben Äpfel. Das ist zwar ziemlich unmathematisch, dient aber dem Verständnis.
Ich fordere sogar ausdrücklich dazu auf sich diese Sichtweise zu eigen zu machen, wenn man mal nicht ganz sicher weiß ob eine bestimmte Zusammenfassung erlaubt ist oder nicht.
Noch ein paar Beispiele"

$$\begin{aligned}
2x + 3x &= 5x \\
2a + 4a + 5b &= 6a + 5b \\
3x - 5x + 8x &= 6x \\
2xz + 3x &= \text{'geht' nicht, da } xz \neq x! \\
2u + 3v - u + v &= u + 4v
\end{aligned}$$

Am letzten Beispiel sieht man, dass auch mehrere Variablen, wenn sie an unterschiedlichen Stellen im Term stehen, zusammen gefasst werden können.

Aufgaben

A8. Vereinfache die folgenden Terme durch Addition und Subtraktion gleicher Variablen:

a)	$a + 2a$	b)	$x + x - x + x - x$	c)	$2ab + 3bc + 3ab + 4bc$
d)	$2a + 3b + 2a + 3b$	e)	$3x + y - 4y + x$	f)	$3a + 2b - 3c + 2a - 2b + 5c$
g)	$2ab + 3ab$	h)	$4x^2 + 2x - x^2 + 3x$	i)	$2ab + 3bc + 5cd - 3ba - 2cb - 4dc$

3.4 Klammern

3.4.1 Addition von Klammern

> Wird eine Klammer addiert, dann kann die Klammer, sowie das vor der öffnenden Klammer stehende Pluszeichen weggelassen werden.
> Steht hinter der öffnenden Klammer kein Vor- oder Rechenzeichen, dass ist es ein Pluszeichen, welches dann ausgeschrieben werden muss.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
a + (2a + 3) &= a + 2a + 3 \\
x + (-2x + 5) &= x - 2x + 5 \\
(a + b) + (a - b) &= a + b + a - b
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Am zweiten Beispiel erkennt man, dass wirklich das Pluszeichen vor der Klammer verschwindet. Manchmal findet man die Aussage, dass eine Klammer, ddie addiert wird, einfach weggelassen werden kann. So einfach ist die Sache dann allerdings doch nicht.
2. Im dritten Beispiel steht auch vor der ersten öffnenden Klammer ein unausgeschriebenes Pluszeichen, so dass auch die Klammer nach dem gleichen Verfahren aufgelöst werden kann.

Aufgaben

A9. Löse die Klammern auf

a)	$a + (8 + 5a)$	b)	$x + (y + z)$
c)	$5 + (2a + 3)$	d)	$\frac{1}{2}x + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{3})$
e)	$\frac{1}{7} + (\frac{3}{7}a + \frac{5}{7})$	f)	$0,3x + (2,1x + 5,3 - 1,9x)$
g)	$3a + (2a + 3) + (6 - 5a)$	h)	$5x + (-2x + 3y) + (5x + 2y)$
i)	$(-3a + 5b - c) + (4a + 3c - 7b) + (a - b - c)$	j)	$(3x + 2y) + (5x - 2y) + (3a + b)$

3.4.2 Subtraktion von Klammern

> Wird eine Klammer subtrahiert, dann werden zunächst in der Klammer alle Vor- und Rechenzeichen umgedreht (Plus zu Minus und umgekehrt) und dann das führend Minuszeichen und die Klammer weggelassen.

Beispiele:

$$a - (2a + 3) = a - 2a - 3$$
$$x - (-2x + 5) = x + 2x - 5$$
$$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b$$

Im letzten Beispiel wurde sowohl eine Klammer aufgelöst, bei der ein Minuszeichen davor stand, als auch eines vor der ein (unsichtbares) Pluszeichen stand!

Aufgaben

A10. Löse die Klammern auf:

a)	$a - (2a - 3b)$	b)	$2x - (-3x - 5y)$
c)	$2r - (3r + s) - (5s + 3r)$	d)	$5x - (-3x + 2y) - (x - 7y)$
e)	$\frac{1}{2}x - (\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y) - (-\frac{1}{4}x - \frac{7}{3}y)$	f)	$0,2a - (-3,1b - 2,4a) - (2,1a - 1,2b)$
g)	$3a - (2a - 3b + c) - 2c$	h)	$-(2u + 3v) - (-5u - 2v)$

3.4.3 Klammern in Klammern

Wie schon bei den Zahlen geschrieben, sollten Klammern immer 'von innen nach außen' aufgelöst werden. Auch bei Termen ist das nicht anders:

$$\begin{aligned}
&2a + \{3b - [2a - (3b + 2c) + (3a - 2c)]\} - \{5c - [3b - (2a - 5c) + (3b - 7a)]\} \\
&= 2a + \{3b - [2a - 3b - 2c + 3a - 2c]\} - \{5c - [3b - 2a + 5c + 3b - 7a]\} \\
&= 2a + \{3b - 2a + 3b + 2c - 3a + 2c\} - \{5c - 3b + 2a - 5c - 3b + 7a\} \\
&= 2a + 3b - 2a + 3b + 2c - 3a + 2c - 5c + 3b - 2a + 5c + 3b - 7a \\
&= -12a + 12b + 4c
\end{aligned}$$

Bei so langen Termen empfiehl es sich allerdings schon bei den Zwischenschritten Teilterme zusammen zu fassen. Das könnte zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned}
&2a + \{3b - [2a - (3b + 2c) + (3a - 2c)]\} - \{5c - [3b - (2a - 5c) + (3b - 7a)]\} \\
&= 2a + \{3b - [2a - 3b - 2c + 3a - 2c]\} - \{5c - [3b - 2a + 5c + 3b - 7a]\} \\
&= 2a + \{3b - [5a - 3b + 4c]\} - \{5c - [-9a + 6b + 5c]\} \\
&= 2a + \{3b - 5a + 3b - 4c\} - \{5c + 9a - 6b - 5c\} \\
&= 2a + 6b - 5a - 4c - 9a + 6b \\
&= -12a + 12b - 4c
\end{aligned}$$

Aufgaben

A11. Löse die Klammern auf und fasse möglichst weit zusammen.

a)	$2x - [(3x + 2y) - (4x + 2y)]$	b)	$3a + [2b - (3a + 5b) - 2a]$
c)	$-[-(2x + 3y) - (3x + 2y)]$	d)	$[(3r - 2s + 3t) - (5t - 2r + 5s)]$

3.4.4 Multiplikation einer Klammer mit einem Term

Soll eine Klammer mit einem Term multipliziert werden, dann geschieht das strikt entlang des Distributivgesetzes:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Hierbei ist es egal, ob es sich bei dem 'a', 'b' und 'c' um einfache Variablen handelt, oder um komplexere (Teil)Terme. In jedem Fall:

> Eine Klammer wird mit einem Term multipliziert, indem jeder Summand in der Klammer mit dem Term multipliziert wird.
> Vorzeichen und Terme können dabei getrennt behandelt werden.

Der letzte Satz verdient vielleicht noch ein bisschen Erläuterung. Diese kann am besten mit einem Beispiel erfolgen. Betrachtet man etwa die 'Aufgabe':

$$-2x(3y-4z)$$

Wie in dem Satz angegeben, können bei der Berechnung des Ergebnisses Vor- bzw. Rechenzeichen und Berechnung der Terme getrennt erfolgen. Die erste Rechnung ist: $-2x\cdot(+)3y$. Hier rechnet man zunächst '$-\cdot+=-$'. Danach kommt dann die Rechnung: '$2x\cdot 3y=6xy$'. Das erste Teilergebnis ist also: '$-6xy$'.
Nun muss '$-2x$' mit '$-4z$' multipliziert werden. Auch hier erst die Vor- bzw. Rechenzeichen: '$-\cdot-=+$' und dann die Terme: '$2x\cdot 4z=8xz$'. Das zweite Teilergebnis ist also: '$+8xz$'. Nun ist die Berechnung beendet und es ist:

$$-2x(3y-4z)=-6xy+8xz$$

Aufgaben

A12. Multipliziere die folgenden Klammern aus:

a)	$2a(3b+5c)$	b)	$4r(2r-3s)$	c)	$-3x(-2a-3b)$
d)	$2abc(3a+4b-7c)$	e)	$-3x(-3x+2y-3z)$	f)	$13uv(-2vw+3uw-4uv)$

Die Sache wird oftmal etwas schwieriger, wenn mehrere solcher Termumformungen im Zusammenhang auftreten. Man betrachte folgenden Term:

$$4x^2-[3x(2x-4y+2z)-5y(-4x-2y+3z)]$$

Hier wird eine Klammer subtrahiert (die eckige Klammer) und zwei Klammern multipliziert (die beiden 'inneren'). Da von innen nach außen aufgelöst wird, müssen erst die beiden runden Klammern aufgelöst werden. Die erste dürfte dabei kein Problem sein, bei der zweiten sollte man sich strikt an die Regel halten: Erst Vorzeichen rechnen, dann Terme. Sollte man einmal unschlüssig sein, so kann man problemlos noch weitere Klammern hinzufügen - Merke: Lieber ein bisschen mehr rechnen, dafür richtig, als zu viele Schritte auf einmal im Kopf und dann hat sich an irgendeiner Stelle ein Fehler eingeschlichen[2]. Die Rechnung könnte also folgendermaßen aussehen (mit zusätzlicher Klammer):

$$\begin{aligned}
&4x^2-[3x(2x-4y+2z)-\{5y(-4x-2y+3z)\}]\\
&=4x^2-[3x(2x-4y+2z)-\{-20xy-10y^2+15yz\}]\\
&=4x^2-[6x^2-12xy+6xz+20xy+10y^2-15yz]\\
&=4x^2-6x^2+12xy-6xz-20xy-10y^2+15yz\\
&=-2x^2-8xy+9yz-10y^2
\end{aligned}$$

Aufgaben

A13. Löse die Klammern auf und fasse zusammen

a)	$a(2a+3b)-b(4a-2b)$
b)	$2abc(-3a+4b-2c)-5abc(4a-3b-7c)$
c)	$3x-[2x(4x-5y)-3y(2x+5y)]$
d)	$3b[2a(4a+2b)-3b(4a-2b)]-2a[3a(3b-2a)-5b(-2b+3a)]$

[2] Wenn ich für jedes Mal, an dem ich einen solchen Fehler bemerkt habe — vorzugsweise Vorzeichenfehler — einen Euro bekäme . . .

3.5 Klammer mal Klammer

Werden zwei Klammern miteinander multipliziert, so stellt jede Kammer ihrerseits auch wieder einen Term dar. Die Multiplikation einer Klammer mit einer anderen Klammer folgt also strikt dem Muster des Distributivgesetzes[3]:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= c(a+b)+d(a+b)\\ &= ac+bc+ad+bd\end{aligned}$$

Betrachtet man nun das Ergebnis der obigen Rechnung einmal genauer, dann stellt man eine interessante Beobachtung fest, die zu einer starken Vereinfachung der Rechnung führen kann.
In der ersten Klammer befanden sich die Summanden 'a' und 'b'. In der zweiten Klammer die Summanden 'c' und 'd'. Der erste Summand der ersten Klammer wurde nun mit beiden Summanden der zweiten Klammer multipliziert, und auch der zweite Summand, das 'b', wird sowohl mit dem 'c' als auch dem 'd' multipliziert. Offenbar gilt die Regel:

> Werden zwei Klammern miteinander multipliziert, dann wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Wie schon oben geschrieben, sollte man im Zweifelsfalle lieber noch ein paar Klammern hinzufügen, wenn man Fehler vermeiden will:

$$\begin{aligned}(x-2)(y+3)-(x+4)(y-3) &= (x-2)(y+3)-[(x+4)(y-3)]\\ &= xy+3x-2y-12-[xy-3x+4y-12]\\ &= xy+3x-2y-12-xy+3x-4y+12\\ &= xy+3x-2y-12-xy+3x-4y+12\\ &= 6x-6y\end{aligned}$$

Aufgaben

A14. Multipliziere die Klammern aus und fasse zusammen

a)	$(a+b)(x+y)$	b)	$(2x-y)(3a-2b)$
c)	$(a+b+c)(2a-3b+4c)$	d)	$(2x-3y+5z)(-3x+2y-z)$
e)	$3x(2x+4y)(-3x-y)-5x(x-y)(-2x-3y)$		

3.6 Identische Klammern

Noch einfacher wird die Sache, wenn die beiden Klammern, die miteinander multipliziert werden sollen, nur zwei Summanden enthalten und die sogar noch identisch sind:

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y) &= x^2+xz+xz+y^2\\ &= x^2+2xz+y^2\\ (u-v)(u-v) &= u^2-uv-uv+v^2\\ &= u^2-2uv+v^2\end{aligned}$$

Betrachtet man die beiden obigen Beispiele, dann fällt auf, dass in jedem Fall das Ergebnis mit dem Quadrat des ersten Terms in der Klammer beginnt, dann kommt das doppelte Produkt von erstem mit zweitem Term und dann kommt das Quadrat des zweiten Terms. Der einzige Unterschied besteht darin, dass im zweiten Fall vor dem gemischten Term in der Mitte ein Minuszeichen steht.
Da dieser Zusammenhang immer gleich bleibt, hat er sogar einen eigenen Namen bekommen: Die binomischen Formeln. Schreibt man diese beiden Formeln mit den Termen T_1 und T_2 auf, dann ergibt sich:

[3] Ich hoffe, die folgende Rechnung erklärt sich von selbst. Das Distributivgesetz wird insgesamt dreimal angewendet.

$$
\begin{aligned}
(T_1+T_2)(T_1+T_2) &= (T_1+T_2)^2 \\
&= T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2 \\
(T_1-T_2)(T_1-T2) &= (T_1-T_2)^2 \\
&= T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2
\end{aligned}
$$

Wenn die Inhalte der Klammern nicht genau identisch sind, genauer, wenn einmal ein Plus- und einmal ein Minuszeichen darin steht, dann ergibt sich die sogenannte dritte binomische Formel:

$$
(T_1+T_2)(T_1-T_2) = T_1^2 - T_2^2
$$

der oftmal eine ganz besondere Bedeutung zukommt. Auf jeden Fall können nun erst einmal einige Aufgaben ganz ohne Zwischenschritt gelöst werden.

Aufgaben

A15. Löse die Klammern auf.

a)	$(a+b)(a+b)$	b)	$(x-y)(x-y)$	c)	$(r+s)(r-s)$
d)	$(x+y)^2$	e)	$(u-v)^2$	f)	$(2a+b)(2a-b)$
g)	$(2a+3b)(2a+3b)$	h)	$(3x-4y)(3x-4y)$	i)	$(4r-3s)(4r+3s)$

3.7 Ausklammern / Faktorisieren

3.7.1 Mit dem Distributivgesetz

Bisher wurde das Distributivgesetz immer in einer Richtung verwendet:

$$
a(b+c) = ab + ac
$$

Nichts spricht dagegen dieses Gesetz auch in der anderen Richtung zu verwenden:

$$
ab + ac = a(b+c)
$$

Man nennt diesen Vorgang 'Ausklammern', weil, im obigen Beispiel das 'a' *aus der Klammer* heraus geholt wurde. Man kann allerdings auch darauf verweisen, dass links ein Summen- und rechts ein Produktterm steht[4], der aus Faktoren besteht. Daher nennt man diese Umformung mitunter auch 'Faktorisieren'.
Wenn man die Umformung genauer ansieht, dann stellt man fest, dass man mit einem Summenterm beginnt. Die Summanden dieses Terms bestehen ihrerseits auf Produkttermen. Kommt nun in allen Summanden ein Teilterm als Faktor vor, dann kann dieser Faktor *vor* eine Klammer geschrieben werden. Ein Beispiel soll das erläutern, in dem die Summanden des Summenterms in einem ersten Schritt soweit es geht in Faktoren augespalten werden:

$$
\begin{aligned}
12ac + 18ab &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot c + 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot b \\
&= \underline{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \underline{a}\cdot c + \underline{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \underline{a}\cdot b \\
&= 2\cdot a(2\cdot 3\cdot c + 3\cdot 3\cdot 3\cdot b) \\
&= 2a(6c+9b)
\end{aligned}
$$

Man erkennt, nachdem man die Summanden '$12ac$' und '$18ab$' erst einmal in einzelne Faktoren aufgeteilt hat, dass in beiden eine '2' und in beiden ein 'a' steckt, die dann vor die Klammer geholt werden können. Aus dem Summenterm wurde ein Produktterm.
Wenn ein Faktor mehrfach in allen Summanden vorkommt, dann kann er auch mehrfach ausgeklammert werden:

[4] Ja, die Klassifikation von Termen wird wirklich gebraucht!

$$
\begin{aligned}
16xy + 12xz &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot z \\
&= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{x} \cdot y + \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{x} \cdot z \\
&= 2 \cdot 2 \cdot x(2 \cdot 2 \cdot y + 3 \cdot z) \\
&= 4x(4y + 3z)
\end{aligned}
$$

Ein Sonderfall tritt dann auf, wenn **alle** Teile eines Summanden ausgeklammert werden können und daher '*nichts*' übrig bleibt. In einem solchen Falle muss der entsprechende Summand mit einem '·1' ergänzt werden. Diese '1' bleibt dann in der Klammer übrig:

$$
\begin{aligned}
12ax + 3x &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot x + 3 \cdot x \\
&= 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot a\underline{x} + \underline{3} \cdot \underline{x} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot a\underline{x} + \underline{3} \cdot \underline{x} \cdot 1 \\
&= 2 \cdot x(2 \cdot 2 \cdot a + 1) \\
&= 2x(4a + 1)
\end{aligned}
$$

In der zweiten Zeile erkennt man, dass alle Faktoren dieses Summanden ausgeklammert werden können. In der dritten Zeile wurde daher dieser Summand um das '·1' ergänzt, damit dort auch etwas in der Klammer übrig bleibt.

Aufgaben

A16. Faktorisiere

a)	$a^2 + 5a$	b)	$x^2 - 7x$
c)	$p - p^2$	d)	$21ap + 35bp$
e)	$12q^3 - 8pq^2$	f)	$51rs - 119s^2$
g)	$8m^4 + 24m^2$	h)	$27v^2 - 18v^3$
i)	$36c^3de^2 - 27c^2d^2e^2$	j)	$18m^2n^2 + 12mn^2 + 21m^2n$
k)	$12p^3q^3 - 15p^4q^2 + 21p^2q^4$	l)	$18c^3d^2 - 27c^2d^3 + 45xd^4$

3.7.2 Mit den binomischen Formeln

Es gibt noch eine weitere Methode, um aus einem Summenterm einen Produktterm zu machen, die auf den binomischen Formeln beruht.
Im aktuellen Unterricht an den Schulen kommt diese Methode nicht mehr vor und daher soll sie hier auch nur am Rande erwähnt werden. Betrachtet man die drei Formeln:

$$
\begin{aligned}
T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2 &= (T_1 + T_2)^2 = (T_1 + T_2)(T_1 + T_2) \\
T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2 &= (T_1 - T_2)^2 = (T_1 - T_2)(T_1 - T_2) \\
T_1^2 - T_2^2 &= (T_1 + T_2)(T_1 - T_2)
\end{aligned}
$$

dann ist erkennbar, dass immer auf der einen Seite ein Summenterm steht und auf der anderen ein Produktterm. Die '*Kunst*' dabei, mit den binomischen Formeln einen Summenterm in einen Produktterm zumzuwandeln besteht darin zu erkennen, dass es sich bei einer Summe um die eine Seite einer binomischen Formel handelt.
Am einfachsten ist das bei der dritten binomischen Formel, wenngleich auch hier manchmal ein paar kleinere Umformungen nötig sind, um zu erkennen, dass es sich um den Teil einer binomischen Formel handelt.

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\
r^2 - 4 &= r^2 - 2^2 \\
&= (r + 2(*r - 2) \\
4x^2 - 9y^2 &= (2x)^2 - (3y)^2 \\
&= (2x + 3y)(2x - 3y)
\end{aligned}
$$

Bei den ersten beiden binomischen Formeln ist die Sache oftmals nicht ganz so leicht, aber mit ein bisschen Übung klappt auch das:

$$\begin{aligned}
a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)(a+b)\\
a^2 + 2a + 1 &= a^2 + a \cdot 1a + 1^2\\
&= (a+1)^2\\
4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2\\
&= (2x+3y)^2\\
16u^2 - 40uv + 25v^2 &= (4u)^2 - 2 \cdot 4u \cdot 5v + (5v)^2\\
&= (4u-5v)^2
\end{aligned}$$

Da diese Art des Faktorisierens in der Schule nahezu keine Rolle mehr spielt[5], soll dieses Thema nicht weiter verfolgt werden.

[5] Was der Autor mehr als bedauert!

4 Gleichungen

4.1 Gleichungen lösen

Eine Gleichung besteht einfach aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Üblicherweise stehen mindestens auf einer Seite (mindestens) eine Variable; aber was heißt es eigentlich, wenn man davon spricht eine Gleichung *lösen* zu wollen?
Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel:

$$x + 1 = 5$$

Offenbar handelt es sich um eine Gleichung, denn sie entspricht den Anforderungen, die ich oben an Gleichungen beschrieben habe. Landläufig besteht die Ansicht, dass '*Gleichung lösen*' bedeutet, den '*richtigen*' Wert für x heraus zu bekommen[1]. Das ist allerdings nicht *ganz* richtig, denn im Kapitel über Variablen wurde ja gesagt, dass eine Variable durch eine *beliebige* Zahl ersetzt werden kann.
Nun, machen wir die Probe aufs Exempel und setzen mal einige Zahlen in die obige Gleichung ein:

$$\begin{array}{lll} x = 1 & 1 + 1 = 5 & \text{f} \\ x = 2 & 2 + 1 = 5 & \text{f} \\ x = 3 & 3 + 1 = 5 & \text{f} \\ x = 4 & 4 + 1 = 5 & \text{w} \\ x = 5 & 5 + 1 = 5 & \text{f} \end{array}$$

Zunächst einmal: Alles, was im Kapitel über Variablen gesagt wurde, bleibt richtig! Man kann in eine Variable *jede* Zahl einsetzen. Der Computer stürtzt nicht ab, das Papier auf dem dieser Text vielleicht ausgedruckt wurde, verbrennt nicht. Nichts schlimmes passiert.
Aber trotzdem unterscheiden sich die fünf Versuche, die ich oben hingeschrieben habe. Ganz rechts steht jeweils entweder der Buchstabe 'f' für 'falsch' oder 'w' für 'wahr' und man erkennt, dass nur dann, wenn man für x die Zahl 4 einsetzt, eine 'wahre' Gleichung herauskommt.

> Eine Gleichung zu lösen bedeutet den oder die Variablenwerte zu ermitteln, bei denen eine wahre Gleichung entsteht.

Nun kann man das mit Ausprobieren machen, so wie ich das oben getan habe, aber das hat seine Nachteile. Woher will ich etwa wissen, dass $x = 4$ wirklich die *einzige* Lösung der Gleichung ist? Ich habe gerade mal fünf Zahlen ausprobiert und es gibt unendlich viele davon! Außerdem ist die Ausprobiererei ziemlich unsystematisch und daher im Zweifelsfalle sehr, sehr langsam. Das geht schneller und besser!
Der 'Trick' besteht natürlich darin eine Gleichung **umzuformen** und zwar in eine Gleichung, bei der man die 'Lösung' direkt sehen kann. Das ist offenbar bei allen Gleichungen der Form:

$$\text{Variable} = \text{Zahl}$$

der Fall.

> Oberstes Ziel aller Gleichungsumformungen ist eine Gleichung der Form:
>
> $$\text{Variable} = \text{Zahl}$$

Nun muss noch überlegt werden, was man denn alles mit einer Gleichung anfangen kann, wenn man sie umformen will. Nun, an erster Stelle stehen natürlich die Termumformungen, die ja schon bekannt sind.

[1] Und ich denke, dass jeder schon weiß, um welche Zahl es sich bei dem obigen Beispiel handelt.

Auf jeder Seite der Gleichung dürfen alle Termumformungen vorgenommen werden, bei denen ein gleichwertiger Term entsteht.

Aber es geht noch mehr: Wenn man sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellt, dann wird sofort klar, dass man auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche hinzufügen oder wegnehmen kann, ohne dass ich am Gleichgewicht etwasändert.

Auf den **beiden** Seiten einer Gleichung darf die gleiche Zahl (oder Variable) addiert oder subtrahiert werden.

Und es ändert sich auch nichts am Gleichgewicht einer Waage, wenn man beide Seiten vervielfacht oder gleichmäßig teilt.

Die **beiden** Seiten einer Gleichung dürfen mit der gleichen Zahl multipliziert und/oder dividiert werden.

So seltsam es erscheinen mag, aber mit diesen drei Regeln und dem zuerst formulierten Ziel vor Augen kann wirklich jede Gleichung gelöst werden!
Außerdem gilt noch, die ziemlich triviale Feststellung:

Die beiden Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden.

4.2 Einfache Gleichungen

Gleichungen, in denen die Variable, meistens 'x', '*nur so* vorkommt, heißen: **Lineare Gleichungen**. Um diese Gleichungen soll es erst mal gehen, sie sind besonders einfach.
Fangen wir mit einer einfachen Gleichung an:

$$5x - 3 = 3x + 7$$

Da das Ziel ja immer in einer Gleichung der Form 'Variable=Zahl' (oder, was genau das gleiche ist: 'Zahl=Variable') besteht, kann man sich schon jetzt zu Anfang dafür eintscheiden, welche Seite die Zahlseite und welche die Variablenseite werden soll. Es ist dabei tatächlich vollkommen egal, welche Wahl man trifft, nur getroffen werden sollte sie. Wenn man will, dann kann man seine Entscheidung auch markieren. Ich möchte, dass die linke Seite zur Variablenseite wird und die rechte zur Zahlseite:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 5x - 3 & = & 3x + 7 \end{array}$$

Nun ist klar, dass es Teile in dieser Gleichung gibt, die nicht auf der richtigen Seite stehen. Das sind die '-3' auf der Variablenseite und die '$3x$' auf der Zahlseite.
Fangen wir mit der '-3' an. Man bekommt sie 'weg', indem man auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl (also die '3') mit der Gegenrechnung zur Gleichung hinzufügt.
Nun, die '3' wird in der Gleichung **subtrahiert**, also muss sie auf beiden Seiten der Gleichung **addiert** werden, was nach der oben genannten Regel erlaubt ist. Es ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 5x - 3 + 3 & = & 3x + 7 + 3 \end{array}$$

Nun können die beiden Terme rechts und links des Gleichheittszeichens durch eine Termumformung vereinfacht werden:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 5x & = & 3x + 10 \end{array}$$

Nun '*stört*' nur noch das '$3x$' auf der Zahlseite. Auch die '$3x$' werden in dem rechten Gleichungsterm **addiert**, denn man könnte die Seite ja auch als: '$-4 + 3x$' schreiben. Also sollte auch hier wieder die Gegenrechnung angewendet werden, die Subtraktion:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 5x - 3x & = & 3x + 10 - 3x \end{array}$$

Und dann wieder auf beiden Seiten eine kleine Termumformung:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 2x & = & 10 \end{array}$$

Nun stehen keine Additionen und keine Subtraktionen mehr in der Gleichung, aber immer noch '*stört*' etwas, nämlich die '2' vor dem x auf der linken Seite. Diese wird mit dem x **multipliziert** und daher muss die Gegenrechnung ran, die **Division**. Teilen wir also beide Seiten der Gleichung durch 2:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ 2x \div 2 & = & 10 \div 2 \end{array}$$

Und nun fehlt nur noch eine Termumformung, und die ergibt:

$$\begin{array}{ccc} V & & Z \\ x & = & 5 \end{array}$$

und das Ziel ist erreicht, eine Gleichung der gewünschten Form: 'Variable=Zahl'. Von dieser Gleichung kann man einfach ablesen, welcher Variablenwert zu einer wahren Gleichung führt, nämlich nur dann, wenn für die Variable x eine 5 eingesetzt wird.
Die Gleichung ist gelöst.
Generell kann man bei solch einfachen Gleichungen davon ausgehen, dass immer der gleiche Weg zur Lösugn beschritten werden sollte:

1. Wähle eine Seite der Gleichung als Variablenseite, die andere als Zahlseite.
2. Bringe mit **Addition** und **Subtraktion** so lange alle '*störenden*' Elemente aus der Gleichung heraus.
3. Wenn nur noch eine Division oder Multiplikation übrig ist, dann eliminiere auch die durch die entsprechende Gegenrechnung.

Aufgaben

A17. Löse die folgenden Gleichungen, indem du sie in die in die Form 'Variable=Zahl' bringst.

a)	$2x + 3 = 4x - 7$	b)	$10x + 12 = 2x - 4$	c)	$-3x + 7 = 5x - 15$
d)	$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$	e)	$0,3x - 1,7 = 1,2x + 3,2$	f)	$1,7x - \frac{2}{5} = \frac{13}{3}x + 1,2$

4.2.1 Ein paar Klammern

Es kann sein, dass eine Gleichung Klammerausdrücke enthält. Diese sind immer zuerst aufzulösen und dann können die Gleichungen gelöst werden.

Aufgaben

A18.

a)	$2(x + 2) - 1 = 3$	b)	$5(2x - 7) = 12$
c)	$3(1 - x) = 5x + 1$	d)	$3(x + 1) = 4(x - 1)$
e)	$5(2x - 1) = 3 + 2(3x + 2)$	f)	$2[-(x - 1) - 2 * (x + 2)] = 5$

4.2.2 Sonderfälle

Beim Lösen von Gleichungen können zwei Sonderfälle auftreten, die bislang ausgeklammert geblieben sind. Am einfachsten versteht man sie mit Hilfe von Beispielen:

$$\begin{aligned} 2(x - 1) + x &= 3x - 5 \\ 2x - 2 + x &= 3x - 5 \\ 3x - 2 &= 3x - 5 \\ -2 &= -5 \end{aligned}$$

Offenbar wurde in der Rechnung alles richtig gemacht, aber nach Auflösen der Klammern und anschließender Sortierung nach Variablen und Zahlen erscheint die Gleichung '$-2 = -5$', die offenbar falsch ist.
Tritt ein solcher Fall auf, dann ist die Gleichung **unlösbar**. Es ist vollkommen egal, welche Zahl man an Stelle der Variablen 'x' einsetzt, es kommt immer eine falsche Gleichung heraus.

Der zweite Sonderfall sieht ähnlich aus, unterscheidet sich aber in einem Detail:

$$\begin{aligned}
2(x-1)+2(x-3) &= 4(x-2)\\
2x-2+2x-6 &= 4x-8\\
4x-8 &= 4x-8\\
-8 &= -8
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall 'verschwinden' alle Variablen. Der Unterschied besteht allerdings darin, dass nun eine Gleichung übrig bleibt, die offenbar wahr ist. In diesem Fall kann jede beliebige Zahl an Stelle von 'x' eingesetzt werden, es kommt immer eine wahre Gleichung heraus, die Gleichung ist **allgemeingültig**.

Aufgaben

A19. Untersuche, ob die folgenden Gleichungen eine Lösung habe, unlösbar oder allgemeingültig sind.

a)	$2(x-3)+3(x-2)=5$	b)	$3(x-1)-2(x+5)=x-2$
c)	$5(x+2)-x=4(x+7)-18$	d)	$2[3(x-1)-2(x+2)]=2x-14$
e)	$2(x+5)-3(x-2)=2x-(x+1)$	f)	$4(x+2)-3(x+7)=5(x-1)-4(x+1)$

4.3 Quadratische Gleichungen

Kommt in der Gleichung auch das Quadrat der Variablen vor, dann spricht man von einer quadratischen Gleichung.
Quadratische Gleichungen werden anders gelöst, als lineare Gleichungen, da bei ihnen die Lösungsstrategie von oben nicht aufgeht. In der Regel wird es nicht gelingen diese Gleichung durch die bekannten Umformungen in die Form 'Variable=Zahl' zu bringen. Statt dessen werden sie mit dem Verfahren der '*quadratischen Ergänzung*' gelöst.
Bedauerlicherweise wurde entschieden dieses Verfahren, das massiv auf den binomischen Formeln basiert, im Unterricht nicht mehr zu behandeln, so dass es auch hier nicht vorgestellt werden soll[2].
Eine weitere Besonderheit der quadratischen Gleichungen besteht darin, dass sie **eine** Lösung haben können[3], **keine** Lösung haben oder **zwei** Lösungen haben. Den letzten Fall gibt es bei linearen Gleichungen nicht und die Möglichkeit einer allgemeingültigen Gleichung gibt es bei den quadratischen Gleichungen auch nicht.
Die grundsätzliche Vorgehensweise beim Lösen einer quadratischen Gleichung sieht aber auch jetzt noch grundlegend anders aus, als beim Lösen linearer Gleichungen. Die Schritte, die zunächst gemacht werden müssen, sind die folgenden:

1. Bringe alle Terme der Gleichung auf **eine Seite** der Gleichung, so dass auf der anderen Seite nur eine Null steht.
2. Sollte vor dem 'x^2' noch eine Zahl stehen, dann dividiere die Gleichung durch diese Zahl, so dass das 'x^2' alleine da steht.

Nachdem diese Schritte durchgeführt wurden, sollte sich eine Gleichung ergeben, welche die Form hat:

$$0 = x^2 + px + q$$

wobei 'p' und 'q' beliebige Zahlen sein können. Nun ist weiter zu unterscheiden, ob die beiden Zahlen 'p' und 'q' Null sind oder nicht, woraus sich vier Fälle ergeben.

4.3.1 p ist 0 und q ist 0

In diesem Fall hat die Gleichung das Aussehen:

$$x^2 = 0$$

was bedeutet, dass eine Zahl ('x') mit sich selbst multipliziert Null ergeben muss. Das ist offenbar nur dann der Fall, wenn $x = 0$ ist; die Gleichung ist gelöst.

[2] Man verwende die Suchmaschine seiner Wahl, wenn man zu neugierig ist und es doch unbedingt wissen will. Alternativ frage man seinen Mathematiklehrer — der kennt das noch.

[3] Wie es von den linearen Gleichungen her bekannt ist.

4.3.2 p ist 0 und q ist nicht 0

In diesem Fall hat die Gleichung die Form

$$x^2 + q = 0$$

bei der auch wieder zwei Fälle unterschieden werden müssen, nämlich, ob 'q' größer oder kleiner als Null ist.

4.3.2.1 q ist größer als Null

Wenn $q > 0$ ist, dann könnte die Gleichung etwa folgendermaßen aussehen:

$$x^2 + 4 = 0$$

Eine solche Gleichung hat keine Lösung. Das ist auch einfach zu erkennen, denn wenn man auf beiden Seiten 4 subtrahiert, dann ergibt sich:

$$x^2 = -4$$

was offenbar nicht sein kann, denn wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert, dann kann keine negative Zahl heraus kommen[4].

4.3.2.2 q ist kleiner als Null

Wenn 'q' eine Zahl ist, die kleiner als Null ist, dann sieht die Sache anders aus. Betrachtet man etwa die Gleichung

$$x^2 - 4 = 0$$

dann lässt sich diese zu

$$x^2 = 4$$

umformen. Man erkennt schnell, dass es eine Zahl ('x') gibt, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt, nämlich die 2. Dabei gibt es allerdings einen kleinen 'Haken', die -2 funktioniert nämlich auch, denn $(-2) \cdot (-2) = 4$. Das ist generell so! Da weiterhin gilt, dass $\sqrt{4} = 2$, folgt daraus:

> Eine Gleichung der Form
>
> $$x^2 - q = 0$$
>
> hat immer die beiden Lösungen: $x = \sqrt{q}$ und $x = -\sqrt{q}$

Es gibt noch eine andere Strategie diese Art von Gleichungen zu lösen, die logisch vielleicht ein bisschen besser nachzuvollziehen ist. Lässt man das 'q' auf der Seite, dann lässt sich die Zahl eventuell als Quadrat schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 - \sqrt{4}^2 &= 0 \\ x^2 - 2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nun entspricht aber die linke Seite der Gleichung der einen Seite der dritten binomischen Formel. Demnach kann sie auch in die andere Seite dieser Formel umgewandelt werden:

$$x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

Und damit hat die Gleichung nun die Form:

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

Hier greift nun ein ziemlich wichtiges Argument, das des Nullprodukts. Es besagt, dass dann, wenn das Produkt von zwei Ausdrücken Null ist, einer dieser Ausdrücke Null sein muss[5]. Für die obige Gleichung bedeutet das, dass entweder '$x - 2 = 0$' oder $x + 2 = 0$. Das sind einfache lineare Gleichungen und man erkennt, dass die erste die Lösung $x = 2$ und die zweite die Lösung $x = -2$ haben muss.

---

[4] Wäre die Zahl positiv, dann gälte: 'Plus mal Plus ist Plus'. Wäre sie negativ, dann gälte" 'Minus mal Minus ist Plus' und wäre die Zahl 0, dann gälte: '0 mal 0 ist 0'. Nie kommt eine negative Zahl heraus.

[5] Das wird sofort klar, wenn man sich folgende Situation vorstellt: Angenommen ich hätte mir zwei Zahlen ausgedacht und würde nun verkünden, dass ihr Produkt Null ergibt. In diesem Fall wüsste jeder, dass eine der beiden ausgedachten Zahlen Null sein muss.

Aufgaben

A20. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen, wenn möglich

a)	$0 = x^2 - 9$	b)	$0 = x^2 + 9$	c)	$0 = x^2 - 225$
d)	$0 = x^2 - \frac{1}{4}$	e)	$0 = x^2 - 0,81$	f)	$0 = x^2 - 0,0961$
g)	$0 = 2x^2 + 8$	h)	$0 = 3x^2 - 108$	i)	$0 = -x^2 - 16$

4.3.3 p ist nicht 0 und q ist 0

In diesem Fall hat die Gleichung die Form:

$$x^2 + px = 0$$

Dies ist eine besonders einfach zu lösende Gleichung, deren Lösugn man erhält, wenn man ein 'x' ausklammert:

$$x(x + p) = 0$$

Offenbar gilt auch hier wieder die Regel vom Nullprodukt. Nach dieser Regel muss einer der beiden Faktoren auf der linken Seite Null sein, also: $x = 0$ oder $x + p = 0 \Leftrightarrow x = -p$.
Eine Gleichung der Form $0 = x^2 + px$ hat also immer die beiden Lösungen: $x = 0$ und $x = -p$. Demnach hat

$$0 = x^2 + 7x$$

die Lösungen $x = 0$ und $x = -7$ und die Gleichung

$$0 = x^2 - 5x$$

die Lösungen $x = 0$ und $x = 5$.

Aufgaben

A21. Löse die folgenden Gleichungen

a)	$0 = x^2 - 8x$	b)	$0 = x^2 + 10x$	c)	$0 = x^2 + \frac{1}{2}x$
d)	$0 = 2x^2 - 4x$	e)	$0 = 5x^2 + 20x$	f)	$0 = -x^2 + 3x$

4.3.4 p ist nit 0 und q ist nicht 0

In diesem Fall lässt sich die Gleichung nicht weiter vereinfachen, sondern es bleibt die Gleichung:

$$0 = x^2 + px + q$$

Auf diese allgemeine Form der Gleichung kann man die oben angesprochene quadratische Ergänzung anwenden und erhält die Lösungsformel:

Die Lösungen der quadratischen

$$0 = x^2 + px + q$$

ermitelt man mit der **p-q-Formel**:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ist der Wert unter der Wurzel **kleiner als Null**, hat die quadratische Gleichung **keine Lösung**.
Ist der Wert unter der Wurzel **gleich Null**, dann hat die quadratische Gleichung nur **eine Lösung**.
Ist der Wert unter der Wurzel **größer als Null**, dann hat die quadratische Gleichung **zwei Lösungen**.

Bemerkungen:

1. Es führt kein Weg daran vorbei: Die p-q-Formel **muss** man auswendig lernen! Vor allem nicht das Minuszeichen direkt am Anfang vergessen!
2. Bei der Anwendung der p-q-Formel sollte größtmögliche Sorgfalt angewendet werden. Man sollte sich unbedingt klar machen, welche Werte p und q haben — inklusive **Vorzeichen**!
3. Das Zeichen '$\pm$' vor der Wurzel bedeutet, dass man die Wurzel einmal addiert, um eine Lösung zu ermitteln und einmal subtrahiert, um die andere Lösung zu ermitteln — natürlich nur dann, wenn die Gleichung zwei Lösungen hat.

So einfach es erscheinen mag eine Gleichungsmit einer Lösungsformel zu lösen, so sehr zeigt sich in der Praxis, dass es doch immer wieder zu Schwierigkeiten kommt. Daher sollen hier einige erläuterte Beispiele Folgen.
Bei der Gleichung

$$0 = x^2 - 6x + 8$$

hat 'p' den Wert -6 (man achte auf das Minuszeichen!) und 'q' den Wert 8. Mit diesem Wissen kann die Lösungsformel ausgefüllt werden:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} \\
&= 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8} \\
&= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\
&= 3 \pm \sqrt{1} \\
&= 3 \pm 1 \\
x_1 = 3 + 1 = 4 &\vee x_2 = 3 - 1 = 2
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung hat also die Lösungen $x = 4$ und $x = 2$.
Bei der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 25$$

gilt: $p = -10$ und $q = 25$ und damit ist:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 25} \\
&= 5 \pm \sqrt{25 - 25} \\
&= 5 \pm 0
\end{aligned}$$

Die Gleichung hat also nur die Lösung $x = 5$.
Und noch ein letztes Beispiel:

$$0 = x^2 + 6x + 10$$

Hier sind $p = 6$ und $q = 10$, was in der Formel ergibt:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 10} \\
&= -3 \pm \sqrt{3^2 - 10} \\
&= -3 \pm \sqrt{9 - 10} \\
&= -3 \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Da eine Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert ist, hat diese quadratische Gleichung **keine** Lösung.
Ach ja, folgende Situationen sind natürlich auch möglich:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 4x - 13 \\
x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-13)} \\
&= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 13} \\
&= 2 \pm \sqrt{4 + 13} \\
&= 2 \pm \sqrt{17}
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind also $x = 2 + \sqrt{17} \approx 6,12$ und $x = 2 - \sqrt{17} \approx -2,12$.

Aufgaben

A22. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen

a)	$0 = x^2 - 4x + 3$	b)	$0 = x^2 - 12x + 35$
c)	$0 = x^2 - 4x - 5$	d)	$0 = x^2 + 9x + 14$
e)	$0 = x^2 - 0,4x + 0,03$	f)	$0 = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$
g)	$0 = x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}$	h)	$0 = x^2 - 3,3x + 2,52$
i)	$2x^2 + 40 = 24x$	j)	$3x^2 + 30 = 12x$
k)	$5x^2 = 30x - 45$	l)	$5(x+1)(x-3) = 4(x+7)(x-1)$

4.3.5 Die ganze Geschichte

Zum Abschluss des Abschnitts über quadratische Gleichungen sollen auch noch zwei Verfahren genannt werden, die nicht unbedingt erforderlich sind, um quadratische Gleichungen zu lösen, die aber beide mit etwas mehr mathematischen Background daherkommen, um das Lösen einer quadratischen Gleichung nicht auf das Einsetzen von Werten in eine Formel zu reduzieren.

4.3.5.1 Die quadratische Ergänzung

Das Hauptverfahren beim Lösen quadratischer Gleichungen ist eines, das stark auf den binomischen Formeln beruht. Dies allerdings nicht auf der gewohnten Form, sondern auf die Formeln in folgender Schreibweise:

$$\begin{aligned} T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2 &= (T_1 + T_2)^2 \\ T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2 &= (T_1 - T_2)^2 \\ T_1^2 - T_2^2 &= (T_1 + T_2)(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Die binomischen Formeln, in denen 'T_1' einen ersten und 'T_2' einen zweiten (Teil)Term bezeichnet, wurden also anders herum aufgeschrieben, als es nomalerweise geschieht. Der Grund dafür liegt darin, dass im Verfahren aus einem Summenterm ein Produktterm gemacht werden muss — warum, das folgt später.

Auch hier ist es sicherlich sinnvoll die Beschreibung des Verfahrens mit einem Beispiel zu begleiten. Gesucht ist die Lösung der Gleichung:

$$0 = 0 = 2x^2 + 12x - 14$$

Zunächst einmal sollte man die Gleichung so umformen, dass das 'x^2' wieder 'alleine' steht:

$$0 = x^2 + 6x - 7$$

Nun muss man die beiden ersten Summanden so umformen, dass sie der ersten oder zweiten binomischen Formel entsprechen. Ob es die erste oder die zweite ist, entscheidet sich danach, ob hinter dem 'x^2 ein '+' oder '−' steht. Hier ist es die erste, weil hinter dem 'x^2' ein '+' steht.

Der Anfang der 1. binomischen Formel ist:

$$T_1^2 + 2T_1T_2 \ldots$$

der Anfang der Aufgabe ist:

$$x^2 + 6x \ldots$$

Beide fangen mit einem Quadrat an, die binomische Formel mit 'T_1^2', die Aufgabe mit 'x^2'. Daraus folgt, dass das, was in der Aufgabe 'x' heißt in der binomischen Formel der erste Term 'T_1' ist. Will man die Aufgabe in Form der binomischen Formel bringen, dann muss sie nun folgendermaßen aussehen:

$$0 = x^2 + 2 \cdot x \ldots$$

In der Aufgabe ist der zweite Summand ein '$6x$', aber bisher wurde nur ein '$2 \cdot x$ erkannt. Offenbar muss dieser Teil noch mit 3 multipliziert werden, um wieder auf die '$6x$' zu kommen. Damit ist aber auch klar, was in der Aufgabe dem enstpricht, was in der binomischen Formel 'T_2' ist, nämlich die 3. Damit lässt sich die Aufgabe nun weiter schreiben:

$$0 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 \ldots$$

Die binomische Formel geht nun weiter mit '$\ldots + T_2^2$', um das auch in der Aufgabe zu erreichen, kann man das ergänzen[6]:

$$0 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \ldots$$

Dieser Teil entspricht nun genau der linken Seite der 1. binomischen Formel, allerdings stand in der Aufgabe noch ein '-7' und es ist sicher nicht richtig, wenn man in der Aufgabe einfach so ein '$+3^2$' einfügt. Das muss nun wieder korrigiert werden:

$$0 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \quad - 3^2 - 7$$

Das sieht sicherlich ein bisschen komisch aus, auch wenn man es etwas nagesetzt geschrieben hat, so wie ich es getan habe. Insbesondere das '$+3^2 - 3^2$' wirkt etwas seltsam, aber man mache sich klar, dass bis zum ersten '3^2' die binomische Formel geht. Diese kann nun angewendet werden und man formt das Binom um in die Form, die in der Formel auf der rechten Seite steht:

$$0 = (x+3)^2 - 3^2 - 7$$

oder etwas zusammengefasst:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+3)^2 - 3^2 - 7 \\ &= (x+3)^2 - 9 - 7 \\ &= (x+3)^2 - 16 \end{aligned}$$

Nun kommt die 3. binomische Formel zum Einsatz. Auf ihrer linken Seite steht die Differenz von zwei Quadraten ('$T_1^2 - T_2^2$') und auch die Aufgabe kann nun leicht so umgeformt werden, dass auch die Aufgabe der linken Seite der dritten binomischen Formel entspricht:

$$0 = (x+3)^2 - 4^2$$

Nun formt man die Aufgabe entsprechend der dritten binomischen Formel um und zwar so, dass die deren rechter Seite entspricht und formt das Ganze noch ein wenig um:

$$\begin{aligned} 0 &= [(x+3)+4][(x+3)-4] \\ 0 &= (x+3+4)(x+3-4) \\ 0 &= (x+7)(x-1) \end{aligned}$$

Nun ist man fast fertig. Alles was noch fehlt ist die Regel zum Nullprodukt.

$$\begin{aligned} 0 &= (x+7)(x-1) \\ x+7 = 0 \quad &\vee \quad x-1 = 0 \\ x = -7 \quad &\vee \quad x = 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist gelöst!
Liest ma ndieses Verfahren so mit Erklärungen, dann wirkt es doch sehr unübersichtlich und schwierig[7]. Daher soll noch eine weitere Aufgabe '*am Stück*' vorgerechnet werden. Dazu soll die Gleichung: $0 = 3x^2 - 6x - 45$ gelöst werden, nun mal mit der 2. binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 6x - 45 \\ &= x^2 - 2x - 15 \\ &= x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 15 \\ &= (x-1)^2 - 1 - 15 \\ &= (x-1)^2 - 16 \\ &= (x-1)^2 - 4^2 \\ &= (x-1+4)(x-1-4) \\ &= (x+3)(x-5) \\ x+3 = 0 \quad &\vee \quad x-5 = 0 \\ x = -3 \quad &\vee \quad x = 5 \end{aligned}$$

[6] Da man ein Quadrat ergänzt, um eine vollständige binomische Formel zu erhalten, nennt sich das Verfahren auch 'Quadratische Ergänzung'.

[7] Hat man sich erst mal dran gewöhnt, geht es in der Regel schneller als die p-q-Formel!

4.3.5.2 Der Satz von Viëta

Es gibt noch ein weiteres Verfahren, das unter Umständen sehr geeignet ist, eine quadratische Gleichung zu lösen: Der Satz von Viëta.
Dieses Verfahren hat und Vorteil, dass es unschlagbar schnell ist, allerdings auch den Nachteil, dass es (leider) nicht immer funktioniert.
Die Grundlage dieses Verfahrens besteht darin, dass dann, **wenn**[8] zwei Lösungen hat, gelten muss, dass die Zahl vor dem 'x', also das, was in der p-q-Formel 'p' heißt, gleich der Summe der Lösungen, allerdings mit verkehrtem Vorzeichen, sein muss und die Zahl am Ende, das, was in der p-q-Formel 'q' heißt, das Produkt der beiden Lösungen ist.
Machen wir es mal anders herum, damit es klarer wird. Angenommen man wollte eine quadratische Gleichung haben, deren Lösungen 3 und 4 sind. Die Summe ist 7 und mit verändertem Vorzeichen -7. Das Produkt ist 12. Damit lautet die quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen 3 und 4[9]:

$$0 = x^2 - 7x + 12$$

Wie kann man dieses Wissen nun nutzen, um eine quadratische Gleichung zu lösen, etwa die Gleichung:

$$0 = x^2 + 7x + 6$$

Man sucht nun zwei Zahlen, deren Produkt 6 ist und deren Summe -7 (minus, weil ja die Zahl vor dem 'x' das 'falsche' Vorzeichen hat. Dazu kann man sich überlegen, wie die 6 als Produkt geschrieben werden kann:

Mögliche Faktoren	**Deren Summe**
$1 \cdot 6$	$1 + 6 = 7$
$2 \cdot 3$	$2 + 3 = 5$
$(-2) \cdot (-3)$	$(-2) + (-3) = -5$
$(-1) \cdot (-6)$	$(-1) + (-6) = -7$

Man sieht, dass nur in der letzten Zeile alle Bedingungen erfüllt sind, die Lösungen sind also wirklich $x = -1$ und $x = -6$.

4.4 Höhere Gleichungen

So seltsam es klingen mag, aber nahezu der komplette Bereich der Gleichungen, soweit sie in der Schule vorkommen, ist mit dem bisher gesagten schon beschrieben. Was noch fehlt sind einige Sonderformen, die allerdings auch nur auf die Techniken zurück greifen, die schon bekannt sind. Alleine im Leistungskurs, kommen noch die sogenannten Exponentialgleichungen vor, die zum Abschluss beschrieben werden.

4.4.1 Mit Ausklammern

Eine recht häufige Form der Gleichungen, die in der Oberstufe vorkommen könnte folgendermaßen aussehen:

$$0 = x^3 - 4x^2 - 5x$$

Man erkennt schnell, dass alle Summanden des Terms der rechten Seite ein 'x' enthalten, was somit ausgeklammert werden kann:

$$0 = x(x^2 - 4x - 5)$$

Hier kommt nun wieder die Regel des Nullprdukts zur Geltung. um die obige Gleichung zu lösen muss nun entweder '$x = 0$' oder '$x^2 - 4x - 5 = 0$' sein. Der erste Teil ist trivial und der zweite eine normale quadratische Gleichung, die man schnell lösen kann. Die Gleichung hat die Lösungen: $x = -1$, $x = 0$ und $x = 5$.
Das Gleiche funktioniert natürlich auch dann, wenn man mehr als ein 'x' ausklammern kann. Bei der Gleichung:

$$0 = x^4 + 4x^3 - 5x^2$$

kann sogar ein 'x^2' ausgeklammert werden:

$$0 = x^2(x^2 + 4x - 5$$

Auch hier ergibt sich wieder $x = 0$ und eine quadratische Gleichung, die nun die Lösungen $x = -5$ und $x = 1$ hat.

[8] Und genau darin liegt der Grund, dass es nicht immer anwendbar ist.
[9] Löse die folgende Gleichung und du wirst sehen, dass es klappt!

Aufgaben

A23. Löse die folgenden Gleichungen

a)	$0 = x^3 + 10x^2 - 200x$	b)	$0 = x^4 + x^3 - 12x^2$
c)	$0 = x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$	d)	$0 = x^4 - 2,9x^3 - 0,62x^2$

4.4.2 Substitution

Ein weiterer Sonderfall trintt dann ein, wenn alle Exponenten von 'x' durch die gleiche Zahl teilbar sind. Das gilt etwa für die Gleichung:

$$x^4 - 85x^2 + 324 = 0$$

In diesem Fall sind alle Exponenten durch 2 teilbar[10]. Man ersetzt nun die kleinste der vorkommenden Potenzen von 'x', in diesem Fall das 'x^2 durch eine andere Variable, eingebürgert hat sich 'z'. Da $x^4 = (x^2)(x^2) = (x^2)^2$ ist, kann 'x^4' durch 'z^2' ersetzt werden. Die Gleichung hat nun die Form:

$$z^2 - 85z + 324 = 0$$

eine ganz normale quadratische Gleichung[11]. Diese kann auch ganz normal gelöst werden und es ergibt sich:

$$z = 4 \vee z = 81$$

Nun wird die Ersetzugn wieder rückgängig gemacht, so dass man

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 81$$

erhält. Das sind nun abermals einfache quadratische Gleichgungen, die ebenfalls nach den Regel dafür gelöst werden können. Damit ist die ursprüngliche Gleichung gelöst. Ihre Lösungen sind: $x = -9$, $x = -2$, $x = 2$ und $x = 9$.
Sind die Exponenten allesamt durch 3 teilbar, dann ersetzt man eben 'x^3' durch 'z'. Ansonsten ändert sich das Verfahren wenig.

Aufgaben

A24. Löse die folgenden Gleichungen

a)	$0 = x^4 - 102x^2 + 200$	b)	$0 = x^4 - 45x^2 + 324$
c)	$0 = x^4 - 65x^2 + 64$	d)	$0 = x^4 - \frac{65}{4}x^2 + 4$

4.4.3 Exponentialgleichungen

Auch wenn Exponentialgleichungen im Wesentlichen nur im Leistungskurs vorkommen, sollen sie hier dennoch (kurz) besprochen werden.

4.4.3.1 Die Grundlagen

Betrachtet man die Gleichung

$$a = b \cdot c$$

dann ist diese nach 'a' aufgelöst[12]. Nun kann man diese Gleichung auch nach 'b' oder 'c' auflösen und beide Male wird dazu die gleiche Rechenart verwendet, die Division:

$$b = \frac{a}{c} \qquad c = \frac{a}{b}$$

Nun soll eine Potenzgleichung betrachtet werden:

$$a = b^c$$

[10] Solche Gleichungen nennt man biquadratische Gleichungen

[11] Abgesehen vom Variablennamen.

[12] Was bedeutet, dass diese Variable alleine auf einer Seite der Gleichung steht.

Auch hier kann die Frage gestellt werden, wie diese Gleichung nach 'b' oder 'c' aufgelöst werden kann. Wie diese Gleichung nach 'b' aufgelöst wird, ist schon bekannt, hier kommen die hÖheren Wurzeln ins Spiel:

$$b = \sqrt[c]{a} = a^{\frac{1}{c}}$$

Im Gegensatz zu allen anderen Rechnungen, kann aber für die zweite Zahl, das 'c', **nicht** mit der gleichen Rechnung gearbeitet werden! Wie man sich leicht durch einige Beispiele klar machen kann, wäre: $c = \sqrt[b]{a}$ falsch.

> Die Potenzrechnung kennt im Gegensatz zu allen anderen Rechnungen **zwei** 'Gegenrechnungen'. Es gilt:
>
> $$a = b^c \qquad b = a^{\frac{1}{c}} \qquad c = \log_b(a)$$
>
> '$\log_b$' heißt: Logarithmus zur Basis b.

Für den Logarithmus gelten die verschiedenen Logarithmusgesetze, die mit den jeweiligen Potenzgesetzen korrelieren:

> Für die Logarithmen gilt:
>
> 1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
> 2. $\log_a(b \div c) = \log_a(b) - \log_a(c)$
> 3. $log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

Diese Regeln gelten für alle Logarithmen zu jeder beliebigen Basis. Die meisten Taschenrechner kennen zwei Logarithen: Den sogenannten 'natürlichen Logarithmus'[13], der oft auch mit 'ln' abgekürzt wird und den sogenannten dekadischen Logarithmus[14], der 'lg' abgekürzt wird.

4.4.3.2 Exponentialgleichungen lösen

Nun liegt das Material vor, das benötigt wird, um eine Exponentialgleichung zu lösen. Am einfachsten soll das Verfahren mit einem Beispiel erläutert werden:

$$2^x + 2 = 10$$

Offenbar ist die Lösugn $x = 3$, denn $2^3 + 2 = 10$, aber wie *berechnet* man das?
Nun, der erste Schritt muss immer sein, dass die Potenz, deren Exponent eine Variable ist, auf einer Seite der Gleichung steht. Das geht hier offenbar recht einfach, indem man auf beiden Seiten der Gleichung eine 2 subtrahiert:

$$2^x = 8$$

Mit dem Logarithmus zur Basis 2 könnte man das Ergebnis sofort ausrechnen, aber die Taschenrechner bieten diese Möglichkeit nicht an. Sie ist aber auch nicht nötig. Zunächst wendet man einfach *irgendeinen* Logarithmus auf beide Seiten der Gleichung an. Ich wähle hier den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(2^x) = \ln(10)$$

Nach dem dritten Logarithmusgesetz kann man den Exponenten vor den Logarithmus holen:

$$x \ln(2) = \ln(10)$$

Dividiert man nun das ganze durch den ln(2), erhält man:

$$x = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx \frac{0.69\dots}{2.30\dots} = 3$$

Die Gleichung ist gelöst.

[13] Das ist der Logarithmus zur Basis e, die Eulersche Zahl.

[14] Das ist der Logarithmus zur Basis 10.

Das geht auch in komplizierteren Fällen:

$$\begin{aligned}
10 &= 2 \cdot 3^{x-1} \\
5 &= 3^{x-1} \\
\ln(5) &= \ln(3^{x-1}) \\
\ln(5) &= (x-1)\ln(3) \\
\frac{\ln(5)}{\ln(3)} &= x-1 \\
\frac{\ln(5)}{\ln(3)} + 1 &= x \\
2{,}46\ldots &= x
\end{aligned}$$

Aufgaben

A25. Löse die folgenden Gleichungen:

a)	$2^x = 10$	b)	$3 \cdot 5^x = 7$
c)	$2 + 3 \cdot 7^x = 100$	d)	$5^x = 2^x \cdot 3$

4.5 Fachbegriffe

Biquadratische Gleichung

Eine Gleichung, in der nur die Exponenten 4, 2 und 0 vorkommen.

Lineare Gleichung

Eine Gleichung, in der die Variable, zumeist 'x', höchstens mit einer Zahl multipliziert wird.

Logarithmus

Der Logarithmus ist **eine** der beiden Umkehrrechnungen des Potenzierens.

Quadratische Gleichung

Eine Gleichung, an der zumindest an einer Stelle auch das Quadrat der Variablen, zumeist 'x^2', vorkommt. Diese werden mit der p-q-Formel gelöst. Sie können eine, keine oder zwei Lösungen haben.

Substitution

Wörtlich: Ersetzung. Gemeint ist damit, wenn ein Teilterm durch einen anderen ersetzt wird. Dies geschieht zum Beispiel dann, wenn eine sogenannte biquadratische Gleichung gelöst werden soll.

Keine Panik!

5 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

5.1 Grundlagen

Treten in irgendeinem Zusammenhang[1] mehrere Gleichungen auf, dann sind diese Gleichungen in der Regel unabhängig. Das Wort 'unabhängig' bedeutet in diesem Zusammenhang, dass gleichnamige Variablen in unterschiedlichen Gleichungen auch unterschiedliche Werte annehmen können, um die Gleichung in eine wahre Aussage zu überführen.
Beispiel:

$$x + 3 = 5 \qquad x - 7 = 2$$

Bei der linken Gleichung führt die Ersetzung der Variablen 'x' durch die Zahl 2 zu der (wahren) Aussage: $2+3=5$, während bei der linken Gleichung die ebenfalls 'x' genannte Variable den Wert 9 annehmen muss, damit eine wahre Aussage $(9-7=2)$ entsteht.
Nun gibt es aber auch Situationen, bei denen eine gleich benannte Variable in mehreren Gleichungen dieselbe Bedeutung haben soll. Wenn etwa in der ersten Gleichung die Variable 'x' den Wert 5 haben soll, dann soll auch in einer zweiten Gleichung der Wert der Variablen 'x' den Wert 5 haben. In diesem Sinne sind also solche Gleichungen 'abhängig'. Derartige 'abhängige' Gleichungen nennt man ein: *Lineares Gleichungssystem* oder kurz *LGS*.
Um zu kennzeichnen, dass es sich um zusammen gehörige Gleichungen handelt, hat es sich eingebürgert diese Gleichungen mit römischen Zahlen zu numerieren:

$$\begin{array}{rrcl} I & 2x - y & = & 0 \\ II & x + 2y & = & 5 \end{array}$$

In einem LGS kann die Anzahl der Variablen gleich der Anzahl der GLeichungen sein, so wie es im obigen Beispiel der Fall war. Solche LGS nennt man: *Quadratische LGS.*. Es gibt aber auch welche, bei denen die Anzahl an Variablen sich von der der Anzahl der Gleichungen unterscheidet. Gibt es mehr Gleichungen als Variablen, dann nennt man das LGS: *Überbestimmtes LGS*. Sind es weniger Gleichungen als Variablen, spricht man von einem *Unterbestimmten LGS*. Und damit noch nicht genug. Auch schon bei den recht einfachen quadratischen LGS gibt es solche, die eine Lösung haben, keine Lösung haben oder unendlich viele Lösungen haben, so wie das ja auch bei normalen Gleichungen der Fall ist.
Es gibt sehr viele Lösungsverfahren für LGS, hier sollen allerdings nur zwei vorgestellt werden, die beide ihre Vor- und Nachteile haben: Das Gauß-Verfahren (auch Gauß-Algorithmus genannt) und das Einsetzungsverfahren.
Das Gauß-Verfahren hat den Vorteil, dass es sich sehr kompakt schreiben lässt. Der Nachteil ist allerdings, dass es sehr hohe Konzentration erfordert, damit keine Rechenfehler passieren.
Das Einsetzungsverfahren hat den Nachteil, dass es deutlich mehr Platz beansprucht, dafür ist es sehr einfach in der Anwendung und längst nicht so fehleranfällig.

5.2 Der Gauß-Algorithmus

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Schritte beschrieben, mit denen man mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung eines LGS bestimmen kann. Zur besseren Verdeutlichung soll, parallel zu den Erklärungen, auch sofort ein Gleichungssystem mit diesem Algorithmus gelöst werden:

$$\begin{array}{crcr} I & 3x + y - 2z & = & -1 \\ II & 2x + 2y & = & 2 \\ III & 5x - 3y + 2z & = & 9 \end{array}$$

Der erste Schritt des Gauß-Verfahrens besteht darin das Gleichungssystem in die sogenannte '*Matrixschreibweise*' zu bringen. Dazu ist es sinnvoll das Gleichungssystem so zu schreiben, dass zum einen alle Variablen gleichen Namens (und ihrer Vorfaktoren) senkrecht übereinander stehen, und weiterhin alle Variablen auch mit ihrer Vielfachheit angegeben werden, auch wenn das normalerweise nicht üblich ist. Obiges LGS sähe damit so aus:

[1] Zum Beispiel eine Mathematikarbeit.

$$\begin{array}{rrrrcr} I & 3x & +1y & -2z & = & -1 \\ II & 2x & +2y & +0z & = & 2 \\ III & 5x & -3y & +2z & = & 9 \end{array}$$

Man beachte in der ersten Zeile die Angabe von '$1y$' und in der zweiten Zeile die Angabe: '$0z$'. Nun werden alle Angaben weggelassen, die 'nicht nötig' sind, weil sie sich aus dem Zusammenhang von alleine ergeben. Das sind zum einen die Variablen selber, da diese nun durch ihre Position klar festgelegt sind (im Beispiel: links die xe, dann die ye und schließlich die z). Weiterhin muss auch das Gleichheitszeichen nicht angegeben werden und die Vorzeichen sind nur da nötig, wo es sich um ein Minuszeichen handelt. Auch die römische Numerierung ist nicht erforderlich, da sie nur dazu dient anzuzeigen, dass es sich um ein LGS handelt. Die Matrixschreibweise sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{array}$$

Im praktischen Umgang erweist es sich oft als sinnvoll die Spalten, welche die Variablen beschreiben von der Spalte, die für die einfachen Zahlen steht durch einen senkrechten Strich abzutrennen und unter das Gleichungssystem noch einen waagerechten Strich zu ziehen[2]:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \\ \hline \end{array}$$

5.2.1 Operationen

Nun müssen zwei Dinge unterschieden werden: Zum einen, welche Operationen für das LGS erlaubt sind und zum anderen, welches Ziel mit diesen Operationen verfolgt werden soll. Erlaubte Operationen sind:

1. Zeilen dürfen beliebig vertauscht werden.
2. Zeilen dürfen mit allen Zahlen außer der Null multipliziert werden. Das schließt die Division einer Zeile durch eine Zahl ein, weil etwa die Division durch 3 auch durch Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ erfolgen kann.
3. Zeilen dürfen addiert werden.

Diese erlaubten Operatoren dürfen auch kombiniert angewendet werden. Statt etwa die erste Zeile zunächst mit 2 zu multiplizieren, dann diese geänderte erste Zeile zur zweiten Zeile zu addieren, um abschließend die (neue) erste Zeile wieder mit $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren, um wieder die ursprüngliche erste Zeile zu erhalten, kann auch einfach das Doppelte der ersten zur zweiten Zeile addiert werden.

5.2.2 Ziel

Ziel der Operationen ist es eine Matrix zu erhalten, bei der auf der Diagonalen von 'oben links' nach 'unten rechts' nur 1en stehen und darunter nur Nullen. Für das obige LGS sähe das etwa so aus[3]:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ \hline \end{array}$$

Es soll hier schon darauf hingewiesen werden, dass dieses Ziel nicht bei allen LGS erreicht werden kann, aber dazu später mehr.

Um das Ziel zu erreichen beginnt man immer 'oben links'. Dort soll eine '1' erscheinen. Das könnte folgendermaßen aussehen:

$$\begin{array}{ccc|cl} 3 & 1 & -2 & -1 & \\ 2 & 2 & 0 & 2 & :2 \\ 5 & -3 & 2 & 9 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1 & \text{Tausch mit II} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \text{Tausch mit I} \\ 5 & -3 & 2 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 3 & 1 & -2 & -1 & \\ 5 & -3 & 2 & 9 & \\ \hline \end{array}$$

[2] Letzteres ist besonders dann von Interesse, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Variablen ist.

[3] Die tatsächlichen Werte, die hier noch nicht näher spezifiziert sind, werden durch Fragezeichen dargestellt.

Es gibt auch andere Möglichkeiten dieses (Teil)Ziel zu erreichen. So hätte man auch einfach die erste Zeile mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren können, was aber zu Brüchen in der Rechnung geführt hätte — wer's mag! Normalerweise bekommt man recht schnell ein Gespür dafür, welche Operationen sich am besten eignen.
Nachdem nun 'oben links' die '1' steht, muss man dafür sorgen, dass unter dieser '1' nur noch Nullen stehen. Das geschieht dadurch, dass man die entsprechende Vielfacheit der ersten Zeile von den Folgezeilen subtrahiert:

1	1	0	1	
3	1	-2	-1	$-3 \cdot \mathrm{I}$
5	-3	2	9	$-5 \cdot \mathrm{I}$
1	1	0	1	
0	-2	-2	-4	
0	-8	2	4	

Die erste Zeile und die erste Spalte haben nun schon das Aussehen, das oben im Ziel gefordert wurde und brauchen im Weiteren nicht mehr berücksichtigt zu werden. Man schreibt die erste Zeile und erste Spalte zwar auch weiterhin mit ab, aber weiter gerechnet wird mit der Matrix, die entstehen würde, wenn man die erste Zeile und erste Spalte einfach streicht. Mit dieser 'verkleinerten' Matrix macht man genau so weiter, wie man bisher gearbeitet hat, also: Erst 'oben links' die '1' und dann darunter die Nullen. Das Ganze sieht dann so aus:

1	1	0	1	
0	-2	-2	-4	$: (-2)$
0	-8	2	4	
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	-8	2	4	$+8 \cdot \mathrm{II}$
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	0	10	20	$: 10$
1	1	0	1	
0	1	1	2	
0	0	1	2	

5.2.3 Das Ergebnis

Nachdem das oben formulierte Ziel erreicht ist, ist es am einfachsten, wenn man das LGS wieder in der üblichen Schreibweise notiert:

$$\begin{array}{lcccc}
I & x & +y & & = & 1 \\
II & & y & +z & = & 2 \\
III & & & z & = & 2
\end{array}$$

Die dritte Zeile lässt sofort erkennen, dass $z = 2$ sein muss. Setzt man diesen Wert in die zweite Zeile ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} y + 2 &= 2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Womit auch der zweite Variablenwert ermittelt wäre. Setzt man diesen (und ggf., allerdings nicht in diesem Beispiel, auch den Wert von z) in die erste Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} x + 0 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Damit sind dann alle drei Variablenwerte bestimmt, das LGS ist gelöst[4].

[4] Auch wenn die Lösung aus drei Zahlen besteht, ist es nur **eine** Lösung! Aus den drei Gleichungen werden nur dann in allen drei Fällen wahre Aussagen, wenn man in **allen drei** Gleichungen für x die 1, für y die 0 und für z die 2 einsetzt!

Aufgaben

A26. Bringe die folgenden Gleichungssysteme in die Matrixform:

a)
$$\begin{array}{llcl} I & 2x+3y & = & 7 \\ II & 4x-7y & = & 11 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{llcl} I & 2x+y & = & 2 \\ II & -x+2y & = & 3 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{llcl} I & 3a+5b-c & = & 7 \\ II & 2a+b+c & = & 1 \\ III & 7a-3b+2c & = & 13 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{llcl} I & 5x-y & = & 3 \\ II & y+2z & = & 11 \\ III & 3x+z & = & 7 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{llcl} I & 2x+7y & = & 12 \\ II & 5x+2y & = & 10 \\ III & x-y & = & 14 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{llcl} I & 3a+4b-c & = & 0 \\ II & 2a+2b-c & = & 1 \end{array}$$

5.2.4 Die verschiedenen Möglichkeiten

Schon oben wurde darauf hingewiesen, dass ein LGS, auch ein quadratisches, eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Wie diese Fälle im Rahmen des Gauß-Algorithmus unterschieden werden können, soll nun geklärt werden. Dabei wird immer davon ausgegangen, dass die beschriebenen Situationen nicht durch Rechenfehler entstanden sind. Außerdem müssen wir uns nun von dem bisherigen Beispiel verabschieden, da dieses ja nur einen der drei Fälle abdeckt — es hat eine Lösung.

Entsteht beim Gauß-Algorithmus eine Zeile, welche die folgende Form hat[5]:

$$0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad ?$$

Wenn also alle Zahlen, die sich auf die Variablen beziehen, Null sind und die Zahl, die für sich ganz rechts steht nicht auch Null ist, dann ist das LGS **unlösbar**, es hat keine Lösung. Das könnte so aussehen:

$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & 1 & 0 & 1 & \\
3 & 1 & -2 & -1 & -3\cdot\mathrm{I} \\
4 & 2 & -2 & 1 & -4\cdot\mathrm{I} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & -2 & -2 & -4 & :(-2) \\
0 & -2 & -2 & -3 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & -2 & -2 & -3 & +2\cdot\mathrm{II} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow
\end{array}$$

Die entscheidende Zeile ist mit einem $\leftarrow$ gekennzeichnet.

Die weitere Bearbeitung kann nun sofort abgebrochen werden. Dies gilt auch dann, wenn eine solche Zeile schon früher im Algorithmus auftritt. Man muss allerdings unterscheiden, ob die Zeile nur aus Nullen besteht, also auch der Zahlwert ganz rechts Null ist, oder eben nicht. Nur im letzten Fall ist das LGS unlösbar.

Nun zur Unterscheidung der beiden weiteren Fälle: **eine** oder **unendlich viele** Lösungen. Dazu bietet sich ein Hilfsbegriff an: Die 'Freiheitsgrade' des LGS. Man berechnet den Freiheitsgrad eines LGS, indem man von der Anzahl der Variablen die Anzahl der Zeilen subtrahiert, die nicht nur aus Nullen bestehen, nachdem man das Gauß-Verfahren soweit wie möglich durchgeführt hat. Bei den bisherigen LGS-Beispielen war die Anzahl der Variablen immer 3 und auch die Anzahl der Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen, war immer 3. Damit ergab sich immer der Freiheitsgrad: $3-3=0$.

Anders sähe es etwa bei dem folgenden Gleichungssystem aus:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Dieses LGS hat immer noch drei Variablen[6], aber nur noch zwei Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen. Somit wäre der Freiheitsgrad: $3-2=1$. Bei:

[5] Das Fragezeichen steht hier für irgendeine Zahl, solange es keine Null ist!

[6] Die Anzahl der Variablen ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der Spalten des LGS.

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

wäre der Freiheitsgrad sogar 2, weil es nur eine (die erste) Zeile gibt, die nicht nur aus Nullen besteht!

Die Unterscheidungsregel ist nun ausgesprochen einfach: Ist der Freiheitsgrad 0, dann hat das LGS **eine** Lösung, ist er größer als Null, dann hat das LGS **unendlich viele** Lösungen[7].

5.2.5 Nicht-quadratische LGS

LGS bei denen die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen ist, nennt man 'quadratische' LGS. Wie schon oben erwähnt, gibt es aber auch 'überbestimmte' LGS, bei denen die Anzahl der Gleichungen größer ist als die Anzahl der Variablen und 'unterbstimmte', bei denen es weniger Gleichungen als Variablen gibt.

Das Schöne ist nun, dass sich bei diesen LGS nix ändert! Das Verfahren des Gauß-Algorithmus bleibt gleich und auch die Interpretation, ob es keine, eine oder unendlich viele Lösungen gibt, bleibt gleich.

Wenn man bis hier alles verstanden hat, dann sollte allerdings klar sein, dass bei unterbestimmten LGS nur die Fälle auftreten können, dass das LGS keine oder unendlich viele Lösungen hat. Der Fall, dass eine Lösung vorliegt, kann nicht auftreten. Wenn das nicht klar ist, dann sollte man diesen Text noch mal von Anfang an lesen!

Für den Fall eines überbestimmten LGS hier ein Beispiel:

$$\begin{array}{ccc}
I & 2x + y & = & 11 \\
II & x - y & = & -2 \\
III & 3x + 2y & = & 19
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cl}
2 & 1 & 11 & \text{Tausch mit II} \\
1 & -1 & -2 & \text{Tausch mit I} \\
3 & 2 & 19 & \\
\hline
1 & -1 & -2 & \\
2 & 1 & 11 & -2\cdot\text{I} \\
3 & 2 & 19 & -3\cdot\text{I} \\
\hline
1 & -1 & -2 & \\
0 & 3 & 15 & :3 \\
0 & 5 & 25 & \\
\hline
1 & -1 & -2 & \\
0 & 1 & 5 & \\
0 & 5 & 25 & -5\cdot\text{II} \\
\hline
1 & -1 & -2 & \\
0 & 1 & 5 & \\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Das LGS hat den Freiheitsgrad 0, denn es gibt zwei Variablen und zwei Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen. Es hat also eine Lösung ($x = 3$ und $y = 5$).

Aufgaben

A27. Bei den folgenden Aufgaben steht ein '?' für eine Zahl, die nicht Null ist. Gib jeweils an, wie die Lösung des zugehörigen LGS aussieht (eine, keine, unendlich viele Lösungen). Gib im Falle unendlich vieler Lösungen auch den Freiheitsgrad des LGS an.

a) $\begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{cc|c} 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ e) $\begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ \hline \end{array}$ f) $\begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? \\ \hline \end{array}$

[7] Worin dann noch der Unterschied etwa zwischen Freiheitsgrad 1 und Freiheitsgrad 2 besteht, soll euch euer Lehrer erklären.

A28. Löse die folgenden LGS mit dem Gauß-Algorithmus

a)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2a+3b-c & = & 0 \\ II & a-3b+c & = & 3 \\ III & 4a+2b-3c & = & -2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} I & a-b+c & = & 2 \\ II & -a+b+c & = & 1 \\ III & 2a-2b+4c & = & 7 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3x+2y-z & = & 1 \\ II & 2x-2y+z & = & 2 \\ III & 10y-5z & = & -3 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2x+3y-z & = & 7 \\ II & 3x-y+2z & = & 5 \\ III & -6x+13y-11z & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3a+2b-c & = & -4 \\ II & 2a-2b+3c & = & -3 \\ III & 5a+4b+c & = & -10 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{lrcl} I & 5a+2b-2c & = & 6 \\ II & 3a+b+c & = & 2 \\ III & 16a+7b-13c & = & 24 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{lrcl} I & 4a-6b+c & = & 5 \\ II & 2a+c & = & 6 \\ III & 9b-c & = & -2 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z & = & \frac{1}{12} \\ II & \frac{1}{2}x-\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z & = & \frac{1}{48} \\ III & 4x-y+\frac{4}{3}z & = & \frac{1}{6} \end{array}$$

A29. Bestimme die Lösungen mit dem Gauß-Algorithmus

a)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3a & = & \frac{3}{7} \\ II & 14a & = & 2 \\ III & -2a & = & -\frac{2}{7} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2x & = & 7 \\ II & 3x & = & 10.5 \\ III & 4x & = & 15 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2a+\frac{1}{2}b & = & -17 \\ II & \frac{1}{4}a+b & = & 8\frac{1}{2} \\ III & -a+b & = & 16 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lrcl} I & 3x+2y & = & \frac{1}{2} \\ II & 2x-y & = & \frac{1}{3} \\ III & 6x+18y & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{lrcl} I & 2a+2b-c+d & = & 0 \\ II & 3a+b-2c+2d & = & 1 \\ III & -5a+b+4c-4d & = & -3 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{lrcl} I & 5a+2b-3c+d & = & 2 \\ II & 8a-b-c+2d & = & 1 \\ III & -\frac{1}{6}a+4\frac{}{3}b-\frac{7}{6}c-\frac{1}{6}d & = & 1 \end{array}$$

5.3 Das Einsetzungsverfahren

Ein weiteres Verfahren zur Lösung von LGS ist das Einsetzungsverfahren. Es besteht aus zwei Schritten:

1. Löse eine (beliebige) Gleichung nach einer Variablen auf.
2. Ersetze in allen anderen Gleichungen die Variable aus dem ersten Schritt durch den entsprechenden Term.

Auch hier soll das Verfahren durch ein Beispiel erläutert werden. Angenommen wir hätten das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcr} I & a+2b-2c & = & -1 \\ II & 2a-b+3c & = & 9 \\ III & -a+3b+c & = & 8 \end{array}$$

Nun muss man sich eine Gleichung aussuchen, die man nach einer Variablen auflöst. Es ist im mathematischen Sinne vollkommen unerheblich, welche Gleichung man nimmt und welche Variable. Es gibt also 9 verschiedene Möglichkeiten anzufangen[8]
Ich wähle hier die dritte Gleichung, die ich nach 'a' auflösen will:

$$\begin{aligned} -a+3b+c &= 8 \\ 3b+c &= 8+a \\ 3b+c-8 &= a \end{aligned}$$

Für die weitere Arbeit muss man sich klar machen, welches die anderen Gleichungen sind (da mit der dritten Gleichung gearbeitet wurde, sind es die Gleichungen I und II) und was unter dem Term zu verstehen ist. Nun, dieser ist '$3b+c-8$'.

[8] Was den Mathematiklehrern bei der Korrektur von Klassenarbeiten und Klausuren immer Kopfzerbrechen verschafft.

In den Gleichungen I und II müssen nun alle a's durch '$3b + c - 8$' ersetzt werden:

$$\begin{array}{lrcl} I & 3b+c-8+2b-2c & = & -1 \\ & 5b-c & = & 7 \\[4pt] II & 2(3b+c-8)-b+3c & = & 9 \\ & 6b+2c-16-b+3c & = & 9 \\ & 5b+5c & = & 25 \\ & b+c & = & 5 \end{array}$$

Ich habe oben nicht nur 'a' durch '$3b + c - 8$' ersetzt, sondern die sich ergebenden Gleichungen auch soweit wie möglich zusammen gefasst und vereinfacht.
Betrachtet man diese beiden Gleichungen allerdings einmal genauer,

$$\begin{array}{lrcl} I & 5b-c & = & 7 \\ II & b+c & = & 5 \end{array}$$

dann stellt man fest, dass man zwar nun 'nur' noch zwei Gleichungen hat, diese haben aber auch nur noch zwei Variablen!
Durch die beiden Schritte des Einsetzungsverfahrens 'verliert' man eine Gleichung und eine Variable!
Mit dem verkleinerten Gleichungssystem, das nur noch aus den Gleichungen I und II besteht, setzt man das Verfahren fort. Als erstes wird wieder eine Gleichung nach einer Variablen aufgeöst. Ich löse die Gleichung II nach 'b' auf[9]:

$$\begin{aligned} b + c &= 5 \\ b &= 5 - c \end{aligned}$$

Nun ist nur noch eine Gleichung übrig, in der man das 'b' durch '$5 - c$' ersetzen muss:

$$\begin{aligned} 5(5-c) - c &= 7 \\ 25 - 5c - c &= 7 \\ -6c &= -18 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Da auch beim zweiten Mal wieder eine Gleichung (die mit der Nummer II) und eine Variable ('b') weggefallen sind, blieb nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrig und man konnte sie wie gewohnt lösen.
Wenn man den Punkt erreicht hat, an dem man die erste Zahllösung für eine der Variablen berechnet hat, kommen die Gleichungen wieder ins Spiel, die man unterwegs 'verloren' hat und zwar in umgekehrter Reihenfolge.
Die letzte Gleichung, die 'verloren' gegangen ist, war die Gleichung II in der Form: $b = 5 - c$. Hier kann man nun den (nun bekannten) Wert von 'c' einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} b &= 5 - 3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Geht man noch weiter in der Rechnung zurück, kommt man wieder zur Gleichung III in der Form: $a = 3b + c - 8$. Hier kann man die nun bekannten Werte von 'b' und 'c' einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} a &= 3 \cdot 2 + 3 - 8 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Damit sind alle drei Variablenwerte bekannt und das LGS ist gelöst.

5.3.1 Die anderen Möglichkeiten

Die Fälle, in denen eine Gleichungssystem keine Lösung hat, erkennt man daran, dass man während des Verfahrens eine Gleichung ohne Variablen erhält, die falsch ist, wie '$0 = 1$' oder '$10 = 100$'.
Erhält man eine Gleichung ohne Variablen, die immer wahr ist, wie etwa '$0 = 0$' oder '$10 = 10$', dann hat das LGS unendlich viele Möglichkeiten.
Ich halte das Einsetzungsverfahren für das in der Schule geeignetere[10], allerdings ist es für nichtquadratische Gleichungssysteme nicht so geeignet und auch die Freiheitsgrade eines Gleichungssystems sind nicht so leicht ablesbar.

[9] Noch mal: Es ist vollkommen irrelevant, welche Gleichung man nach welcher Variablen auflöst. Mathematisch betrachtet sind alle Ansätze gleichwertig. Es kommt allerdings bei einer ungeschickten Wahl schnell zu 'komplizierten' Zahlen. Man erkennt schnell worauf es ankommt.

[10] Das ist allerdings eine ganz persönliche Meinung und sicher finden sich andere Mathematiklehrer, die zu einem anderen Schluss kommen.

Aufgaben

A30. Löse die folgenden LGS. Bei manchen kann es günstiger sein das Einsetzungsverfahren zu verwenden.als den Gauß-Algorithmus.

a) $\begin{array}{lrcr} I & 2x+y & = & 2 \\ II & x & = & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{lrcr} I & x-4y & = & 2 \\ II & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y & = & 6 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrcr} I & 4x+y & = & 5 \\ II & 2x-y & = & ;-2 \end{array}$ d) $\begin{array}{lrcr} I & 2a+3b & = & 5 \\ II & 4a+6b & = & 9 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrcr} I & 4a-3b & = & 2 \\ II & -8a+6b & = & -4 \end{array}$ f) $\begin{array}{lrcr} I & \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b & = & 2 \\ II & 2a+3b & = & -2 \end{array}$

g) $\begin{array}{lrcr} I & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y & = & \frac{13}{36} \\ II & \frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y & = & -\frac{37}{24} \end{array}$ h) $\begin{array}{lrcr} I & 0.3x-0.5y & = & -0.29 \\ II & 1.2x+3.3y & = & 2.55 \end{array}$

i) $\begin{array}{lrcr} I & \frac{1}{4}x-0.7y & = & 1.2 \\ II & 0.5x-\frac{7}{5}y & = & \frac{5}{2} \end{array}$

5.4 Fachbegriffe

Einsetzungsverfahren

Verfahren zur Lösung von LGS. Es braucht mehr Platz als das Gauß-Verfahren, zeichnet sich allerdings durch zwei sehr einfache Regeln aus, die nur hintereinander ausgeführt werden müssen.

Gauß-Verfahren

Auch Gauß-ALgorithmus genannt ist ein Verfahren zur Lösung von LGS. Es ist in seiner Anwendung sehr knapp, allerdings erfordert es hohe Konzentration bei der Bearbeitung.

Lineares Gleichungssystem LGS

Zwei oder mehr Gleichungen, in denen die Variablen mit gleichem Namen auch die gleiche Bedeutung haben. Das Gleichungssystem gilt dann als gelöst, wenn alle Gleichungen des Systems durch die Ersetzung der Variablen durch Zahlen zu wahren Aussagen werden.

Überbestimmtes LGS

Ein LGS mit mehr Gleichungen als Variablen.

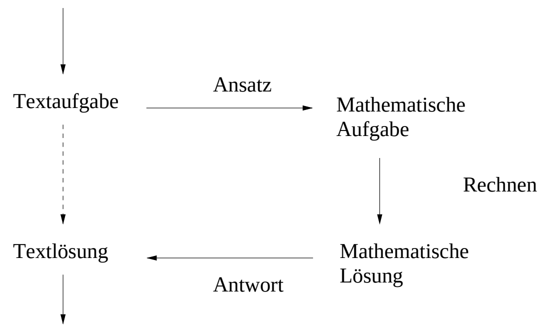
Unterbestimmtes LGS

Ein LGS mit weniger Gleichungen als Variablen.

6 Textaufgaben

6.1 Grundlagen

Seit jeher haben Textaufgaben den Ruf 'besonders schwer' zu sein. Dies hängt mit einer Verquickung von mathematischen mit nicht-mathematischen Umständen zusammen. Oftmals weiß man gar nicht, was mit einer bestimmten Textaufgabe gemeint ist und daher weiß man dann auch gar nicht, wo man anfangen soll. Dieser erste Abschnitt beschreibt einige Strategien, mit denen man diesen Unsicherheiten begegnen kann. Trotzdem bleibt allerdings eine Aussage bestehen: Textaufgaben lernt man nur durch üben! Aus diesem Grund enthält auch das vorliegende Kapitel relativ viele Aufgaben, damit man auch was zum üben hat.
Den meisten Menschen ist überhaupt nicht klar, was eine Textaufgabe eigentlich ist und was sie soll. Nun, zur ersten Frage komme ich gleich, aber was Textaufgaben **sollen**, kann ich sofort beantworten: Praktisch alles, was einem nach der Schule noch in mathematischer Hinsicht begegnet, sind Textaufgaben. Textaufgaben sind schlicht alle Umstände, die man mathematisch lösen kann, auch wenn sie einem in der Regel nicht als mathematische Aufgabe begegnen.
Aber was ist nun eine Textaufgabe[1], und was ist so schwierig an ihnen? Die folgende kleine Darstellung bietet Hilfe:



Normalerweise kommen wir *irgendwie* an eine Textaufgabe. Um das ganze direkt mit einem kleinen Beispiel zu beschreiben, soll hier einfach eine kleine und sehr einfache Textaufgabe herhalten:

> Von zwei Brüdern ist der eine zwei Jahre älter als der andere. In drei Jahren werden die beiden zusammen 18 Jahre alt sein. Wie alt sind die beiden Brüder?

So blöd es vielleicht klingen mag, aber: **LIES — DIE — AUFGABE!!!**
Wenn man das macht, dann fallen einem schon manche Sachen auf. Im Falle des Beispiels sind es:

1. Es ist zum einen von der jetzigen Zeit die Rede.
2. Die Frage bezieht sich *irgendwie* auf diese jetzige Zeit.
3. Eine Angabe bezieht sich auf den Altersunterschied der beiden, der jetzt und in Zukunft gleich ist.
4. Es gibt nur eine Angabe, die sich auf die zukünftige Zeit bezieht.

Schon ganz schön viel, und es ist sicherlich nachvollziehbar, dass dieser Wust an Informationen nicht leicht in einen Zusammenhang zu bringen ist.
Nun soll aus der Textaufgabe, gemäß dem obigen Bild eine mathematische Aufgabe werden. Im Bild habe ich das 'Ansatz' genannt. In der Fachsprache heißt das auch Modellierung, weil nun die Textaufgabe aus der Wirklichkeit in ein mathematische Modell übersetzt werden soll. Auch dazu gibt es ein paar Hilfestellungen, die man sich gut einprägen sollte.
Als erstes sollte man sich wirklich klar machen, was denn **eigentlich** gesucht ist. Das hört sich oft einfacher an, als es dann in der Wirklichkeit ist. Hier, es ist wirklich eine recht einfache Aufgabe, kommt man schnell darauf: Es sind zwei jetzige Alter gesucht!
Im Regelfall wird das mathematische Modell, das nun erstellt werden soll, aus einer Gleichung bestehen, die eine Variable entält. Nun muss man sich also überlegen, wofür man die Variable einsetzen will. Es gibt vier Möglichkeiten: Die beiden Alter jetzt und die beiden Alter in Zukunft. Da die jetzigen Alter gesucht sind, bietet es sich an eines dieser Alter auch mit der Variablen zu

[1] Mitunter findet man auch die Formulierung: 'Aufgabe im Sachzusammenhang'.

besetzen. Bleibt die Frage, ob man den jüngeren oder den älteren Bruder nimmt, was aber ziemlich gleichgültig ist. Ich wähle mal den jüngeren Bruder.
Es hat sich gezeigt, dass es, gerade bei Textaufgaben, sinnvoll ist '*sprechende*' Variablennamen zu verwenden. Statt der zumeist zuerst in den Sinn kommenden Bezeichnung 'x' wähle ich hier 'j', für den **j**üngeren Bruder.
Wenn man will, dann kann man sich nun erst mal alle Informationen, die man nun hat, in einer Liste zusammen schreiben:

Jetziges Alter jüngerer	j
Jetziges Alter älterer	$j+2$
Zukünftiges Alter jüngerer	$j+3$
Zukünftiges Alter älterer	$j+2+3=j+5$

Jetzt erst kann man daran gehen die Aufgabe in Gestalt einer Gleichung zu beschreiben:

$$j+3 \quad j+5=18$$

Diese Gleichung gilt es nun zu lösen:

$$\begin{aligned} j+3+j+5 &= 18 \\ 2j+8 &= 18 \\ 2j &= 10 \\ j &= 5 \end{aligned}$$

Nun ist die Antwort '$j=5$' auf die Frage: "Wie alt sind die beiden?" sicherlich nicht zielführend. Die mathematische Lösung muss noch in eine Textlösung überführt werden:

Die beiden Brüder sind 5 und 7 Jahre alt!

6.1.1 Zusammenfassung

Bei der Lösung einer Textaufgabe sollten immer die folgenden Schritte der Reihe nach erfolgen:

1. Lies die Aufgabe gründlich!
2. Überlege, was eigentlich wirklich gesucht ist.
3. Vergibt einen (sprechenden) Variablennamen für die gesuchte Größe oder eine, die mit ihr in Zusammenhang steht.
4. Stelle die Gleichung auf, die den Zusammenhang modelliert.
5. Löse die Gleichung.
6. 'Übersetze' die mathematische Lösung wieder in den Sachzusammenhang.

6.2 Aufgaben

Ich habe oben schon darauf hingewiesen, dass es gerade bei Textaufgaben sehr darauf ankommt, dass man möglichst viel übt. Aus diesem Grunde biete ich hier nun sehr viele Textaufgaben an. Diese orientieren sich **nicht** am Stoff der Oberstufe, sondern sind auch schon mit den hier in diesem Teil beschriebenen Grundlagen lösbar. Die Aufgaben sind ein bisschen nach den 'Standardaufgaben' gegliedert.

6.2.1 Zahlrätsel

Zahlrätsel gehören zu den einfachsten Textaufgaben und stehen daher auch am Anfang. Bei ihnen kann eigentlich nur eine Schwierigkeit auftreten, wenn von der Quersumme oder dem Vertauschen von Ziffern die Rede ist.
Die Quersumme einer Zahl ist einfach die Summe aller ihrer Ziffern. Wenn also die Zahl 'abc' ist[2], dann ist ihre Quersumme: 'a+b+c'.
So hat etwa die Zahl '123' die Quersumme: '1+2+3=6'
Wenn eine (zweistellige) Zahl 'ab' gegeben ist, dann ist die Zahl selber: '10a+b'. Die Zahl mit vertauschten Ziffern ist dann: '10b+a'!

A31. Die Summe zweier Zahlen ist 47, ihre Differenz ist 23. Um welche Zahlen handelt es sich?

A32. Addiert man zum Dreifachen einer Zahl das Doppelte einer anderen Zahl, dann erhält man 65. Das Doppelte der ersten Zahl ist gleich dem Dreifachen der zweiten Zahl. Welche Zahlen sind es?

A33. Was muss man von der Summe aus $17p^2$ und $9p^3 \div p^2$ subtrahieren, um die Differenz von $21p$ und $4p^3 \div 0,5p$ zu erhalten?

2 a, b und c sind hier keine Variablen sondern Ziffern einer Zahl, siehe das folgende Beispiel.

A34. Welche Zahl ist um den gleichen Betrag größer als 17, um den sie unter 39 liegt?

A35. Hans verkauft sein Auto für 1650 Euro, der Käufer zahlt in drei Raten. Die erste Rate beträgt zwei Fünftel des Preises und die zweite Rate ist die Hälfte des Restbetrags. Wie groß ist die letzte Rate?

A36. Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl, deren Quersumme 12 beträgt, die Ziffern, so wird die Zahl um 18 größer.

A37. Subtrahiert man von einer zweistelligen Zahl, die durch Umstellung der Ziffern der ursprünglichen Zahl entstanden ist und deren Quersumme 9 beträgt, die ursprüngliche Zahl ab, so erhält man eine Zahl, die $\frac{3}{4}$ mal so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

6.2.2 Alter raten

Hier wurde schon ein Beispiel im generellen Teil zu Textaufgaben vorgestellt.

A38. Ein Großvater und sein Enkel sind zusammen 100 Jahre alt. Vor 10 Jahren war der Großvater dreimal so alt wie sein Enkel. Wie alt sind die beiden?

A39. Zwischen der ältesten Brücke der Welt in der türkischen Stadt Izmir und der ältesten Brücke in Deutschland, der Steinernen Br—"ucke in Regensburg, besteht ein Altersunterschied von genau 2000 Jahre. Wäre die Brücke in Izmir 280 Jahre später gebaut worden, so stände sie im Jahr 2000 genau dreimal so lange, wie die Steinerne Brücke in Regensburg. Wann wurden die beiden Brücken gebaut?

A40. Eine Mutter ist 21 Jahre älter als ihr Kind. In sechs Jahren wird die Mutter fünfmal so alt wie ihr Kind sein. Wo ist der Vater?

6.2.3 Verteilungsaufgaben

A41. Drei Familien bilden eine Lottogemeinschaft, dabei zahlt Familie A pro Wochen zwei Euro, Familie B drei Euro und Familie C vier Euro. Sie vereinbaren, dass von jedem Gewinn die Familie A ein Fünftel, Familie B drei Zehntel und Familie C zwei Fünftel erhalten soll. Der Rest soll für wohltätige Zwecke gespendet werden. Am Ende des Jahres stellen sie fest, dass sie 5200 Euro für wohlẗtige Zwecke gespendet haben. Wieviel Geld hat jede Familie gewonnen?

A42. Eine Erbschaft beträgt 120000 Euro. Sie wird so unter den Erben A, B, C, D aufgeteilt, dass B 6000 Euro mehr bekommt als A, C dreimal so viel wie A und B zusammen und D ein Fünftel der Erbschaft erhält. Wieviel bekommt jeder?

A43. In der U1 und der U2 fahren zusammen 72 Fahrgäste. Steigen 12 Personen in die U2 um, dann sind in der U1 immer noch vier Personen mehr als dreimal so viele wie in der U2. Wieviele Fahrgäste fuhren ursprünglich in der U1 und der U2?

A44. In der U1 befinden sich dreimal soviele Männer wie Frauen. Nachdem ein Ehepaar ausgestiegen ist und vier Frauen neu dazu gekommen sind, befinden sich gleich viele Männer und Frauen in der U-Bahn. Wieviele Männer und Frauen waren es am Anfang?

A45. Sokrates wird nach seinem Alter gefragt und er antwortet: "Zwei Siebtel meines Lebens war ich Kind, ein Sechstel war ich Jüngling und seit 23 Jahren bin ich ein Mann." Wie als ist Sokrates?

A46. Ein Siebtel einer Bohrplattform ist im Meeresboden verankert, drei Fünftel stehen im Wasser und die Plattform ragt 27m über den Meeresspiegel hinaus. Wie tief ist das Meer an dieser Stelle?

A47. Ein Viertel der Schüler eines Gymnasiums befinden sich in der Orientierungsstufe und damit 54 weniger als in der Mittelstufe. Wie viele Schüler besuchen das Gymnasium, wenn in der Oberstufe 270 Schüler sind?

A48. Ein Teil eines Vermögens von insgesamt 12000 Euro ist zu einem Zinssatz von 3% und der andere Teil zu einem Zinssatz von 4% angelegt. Zusammen erbringen die beiden Teile pro Jahr 418 Euro Zinsen. Wie groß sind die beiden Teile?

6.2.4 Mischungsausfgaben

A49. 2 Liter Salzlösung mit 20% Salzgehalt werden sechs Liter reines Wasser zugegeben. Wie hoch ist nun der Salzgehalt?

A50. Mit wieviel Wasser müssen 3 Liter einer 80%igen Salzlösung verdünnt werden, damit eine 30%ige Lösung entsteht?

A51. Mit wieviel Litern 30%iger Salzsäure müssen 5 Liter einer 15%igen Salzsäure gemischt werden, damit 20%ige Säure entsteht?

A52. Man mischt 12kg einer Kaffeesorte A, die 12,60€ pro Kilo kostet mit 8kg einer Kaffeesorte, die 16,60€ pro Kilo kostet. Was kostet die Mischung?

A53. Ein Teehändler will zu Ostern eine Festtagsmischung anbieten, die 13€ pro Kilo kosten soll. Er will dazu 100kg einer Sorte, die 11,50€ das Kilo kostet mit einer anderen mischen, die 18€ pro Kilo kostet. Wieviel muss er davon nehmen?

6.2.5 Füllaufgaben

Achtung! Die Füllaufgaben sind **schwer**!!

A54. Anna braucht für eine Arbeit drei Stunden. Susi schafft die gleiche Arbeit in zwei Stunden. Wie lange brauchen die beiden zusammen?

A55. Ein Schwimmbecken kann durch einen Zulauf in 15 Stunden gefüllt werden. Wenn das Becken voll ist, dauert es 20 Stunden, bis es vollständig geleert ist. Das Becken ist leer und soll gefüllt werden, dabei vergisst der Hausherr aber en Ablauf zu schließen. Wie lange dauert es nun, bis das Becken trotz geöffnetem Ablauf vollständig gefüllt ist?

6.2.6 Bewegungsaufgaben

Alle Bewegungsaufgaben basieren auf der Gleichung: $v = \frac{s}{t}$, wobei 'v' die Geschwindigkeit, 's' die Strecke und 't' die Zeit ist.

A56. Ein Läufer A braucht für eine 25km lange Strecke 30 Minuten mehr als ein Läufer B für eine 15km lange Strecke braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2,5km/h größer als die von B. Wie lange ist A unterwegs?

6.2.7 Quadrataufgaben

Die folgenden Aufgaben führen auf quadratische Gleichungen!

A57. Ein kleiner LKW braucht neun Fahrten mehr als ein großer, um eine Menge Baumaterial zu liefern. Zusammen brauchen die beiden LKW 20 Fahrten. Wieviele Fahrten brauchen die LKW alleine?

6.2.8 Verschiedene Aufgaben

A58. Karl ist 24 Jahre alt. Er ist doppelt so alt, wie Fritz war, als Karl so alt war, wie Fritz ist. Wie alt ist Fritz?

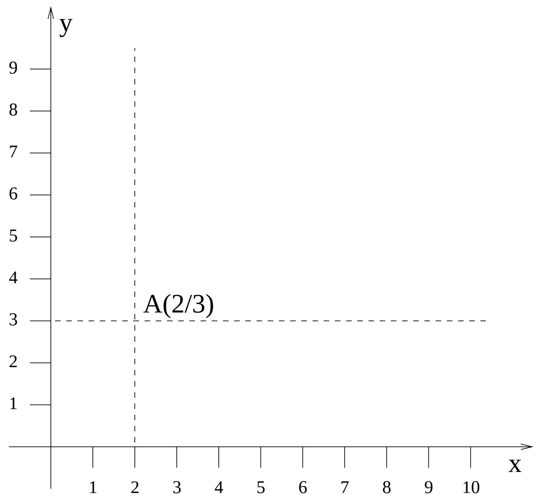
7 Geometrie

In der gymnasialen Oberstufe spielt die klassische Geometrie nur eine untergeordnete Rolle und wird durch die sogenannte 'Analytische Geometrie' fortgesetzt. Dennoch ist es sicherlich hilfreich den einen oder anderen geometrischen Begriff noch einmal ins Gedächtnis zu rufen.

7.1 Grundformen

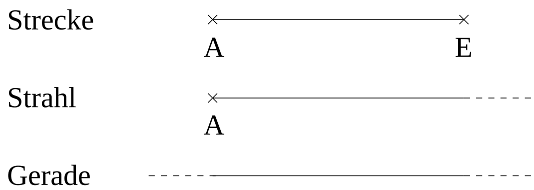
7.1.1 Der Punkt

Der elementarste geometrische '*Gegenstand*' ist der Punkt. Er bezeichnet einfach nur einen Ort. Dabei hat ein (mathematischer) Punkt keine Ausdehnung, nimmt also auch keine Fläche ein.
Punkte werden in der Regel durch Großbuchstaben bezeichnet.
Liegt der Punkt in einem Koordinatensystem, dann kann seine genaue Lage auch durch seine Koordinaten bestimmt oder festgelegt werden, wobei die Anzahl der Koordinaten von der Dimension des Koordinatensystems bestimmt wird. Bei einem eindimensionalen Koordinatensystem[1] hat der Punkt nur eine Koordinate, bei einem zweidimensionalen zwei und bei einem dreidimensionalen drei Koordinaten[2].
Wird etwa in einem zweidimensionalen Koordinatensystem der Punkt $A(2/3)$ angegeben, dann bedeutet dies, dass der Punkt um 2 Einheiten entlang der ersten und drei Einheiten entlang der zweiten Koordinatenachse vom Kreuzungspunkt der Koordinatenachsen, auch Ursprung des Koordinatensystems genannt, entfernt ist.
Beim 'normalen' Koordinatensystem gibt die erste Koordinate an, wie weit der Punkt nach rechts (bei einer positiven Koordinate) oder links (bei einer negativen Koordinate) vom Ursprung entfernt ist, während die zweite Koordinate angibt, wie weit er nach oben (positiv) oder unten (negativ) vom Ursprung entfernt ist.



7.1.2 Strecke, Strahl, Gerade

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten heißt: **Strecke**. Sie besitzt einen Anfangs- und einen Endpunkt. Die Entfernung zwischen diesen Punkten, gemessen in Einheiten des Koordinatensystems, heißt: **Länge der Strecke**, oder **Abstand** von Anfangs- und Endpunkt.
Verlängert man die Strecke über entweder den Anfangs- oder den Endpunkt hinaus unendlich weiter, dann entsteht ein **Strahl**.. Dieser hat nur einen Anfangs- aber keinen Endpunkt mehr. Die Länge des Strahls ist unendlich!
Verlängert man eine Strecke in beide Richtungen unendlich weit, entsteht eine **Gerade**.



[1] Ausgesprochen selten.
[2] Grundsätzlich sind auch Koordinatensysteme denkbar, die mehr als drei Dimensionen haben. In der Schule sind diese allerdings nicht üblich, weil sie sich der Vorstellung entziehen.

7.1.3 Dreieck

Verbindet man drei unterschiedliche Punkte jeweils durch ihre Strecken, entsteht ein **Dreieck**. Heißen die Punkte A, B und C, dann werden die jeweils gegenüber liegenden Seiten (Strecken) mit den Kleinbuchstaben a, b und c bezeichnet[3].
Die Länge der Verbindungsstrecke des Punktes A zur gegenüber liegenden Seite a ist eine der **Höhe**n des Dreiecks, die normalerweise mit 'h_a' bezeichnet wird. Entsprechend gibt es auch noch die Höhen 'h_b' und 'h_c'.
Für die Fläche eines Dreiecks gilt:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

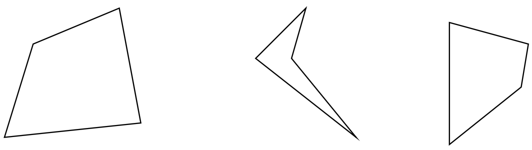
Nennt man eine der drei Seiten des Dreiecks Grundseite und bezeichnet diese mit 'g', dann wird die zigehörige Höhe meist einfach mit 'h' bezeichnet und es ergibt sich die bekannte Flächenformel für das Dreieck:

$$A = \frac{1}{2}gh$$

Ist einer der drei Winkel im Dreieck ein rechter Winkel, dann heißt das Dreieck: **Rechtwinkliges Dreieck**.

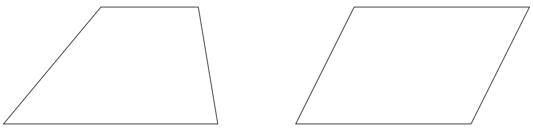
7.1.4 Vierecke

Werden vier Punkte 'rings herum' durch ihre Verbindungsstrecken miteinander verbunden entsteht ein Viereck.



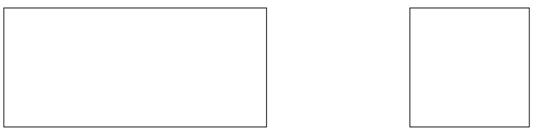
Vierecke

Sind zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks parallel, dann heißt das Viereck: **Trapez**. Sind auch die anderen beiden Seiten zueinander parallel, dann wird das Viereck **Parallelogramm** genannt.



Trapez Parallelogramm

Ist in einem Parallelogramm zusätzlich einer der Winkel ein rechter Winkel[4], dann heißt das Viereck: **Rechteck**. Sind alle seine Seiten auch noch gleich lang: **Quadrat**.



Rechteck Quadrat

Ein Rechteck hat nur zwei unterschiedliche Seitenlängen, die normalerweise mit 'a' und 'b' bezeichnet werden. Die Seitenlänge eines Quadrates wird üblicherweise mit 'a' bezeichnet. Aus diesen Bezeichnungen ergibt sich:

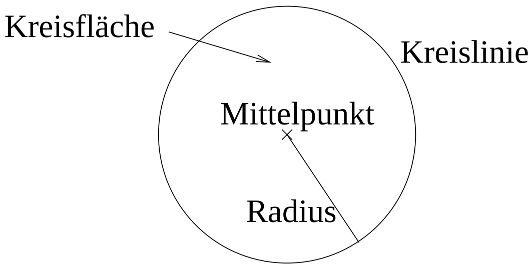
$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b \qquad A_{\text{Quadrat}} = a^2$$

[3] Das ist nur die Standardbezeichnung. Je nach Zusammenhang können die Punkte und die Seiten eines Dreiecks auch andere Bezeichnungen haben.

[4] Dadurch werden automatisch alle anderen Winkel auch zu rechten Winkeln!

7.1.5 Kreis

Ein Kreis besteht aus allen Punkten, die von einem gegebenen (Mittel)Punkt gleich weit entfernt sind. Der Abstand der Punkte vom Mittelpunkt wird **Radius** genannt. Die Linie, die durch die Punkte gebildet wird heißt **Kreislinie** und die Fläche innerhalb dieser Linie **Kreisfläche**.



Für den Umfang eines Kreises gilt:

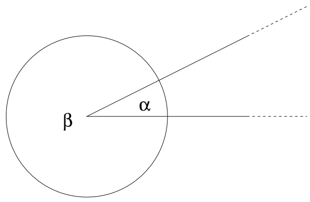
$$U = 2r\pi$$

und für die Kreisfläche:

$$A = r^2\pi$$

7.2 Winkel

Haben zwei Strahlen einen gemeinsamen Anfangspunkt und liegen sie nicht aufeinander, dann schließen sie zwei Winkel ein, die im folgenden Bild mit α und β bezeichnet sind.



Bilden zwei Strahlen einen Winkel, dann nennt man diese Strahlen auch **Schenkel** des Winkels.

7.2.1 Winkelmaße

Der kleinste Winkel, der nach der obigen Vorstellung möglich ist, ist der, bei dem die Strahlen aufeinander liegen. Der größtmögliche Winkel ist dann der zweite und er geht den ganzen Kreis herum. Um nun Winkel vergleichen und mit ihnen rechnen zu können, gibt es verschiedene Möglichkeiten die Größe eines WInkels anzugeben. Die beiden wichtigsten sollen hier vorgestellt werden.

7.2.1.1 Grad

Die wohl populärste Art einen Winkel anzugeben ist das **Grad**[5]. Bei dieser Angabe wird davon ausgegangen, dass sich ein Kreis in 360 genau gleiche Winkel, ausgehend vom Mittelpunkt, teilen lässt. Einer dieser Winkel hat dann das Maß von **einem Grad**.

> Der Winkel, der entsteht, wenn man, ausgehend vom Kreismittelpunkt, einen Kreis in 360 gleiche Teile teilt, heißt ein **Grad**.
> Um zu kennzeichnen, dass es sich um eine Winkelangabe handelt, wird oberhalb des Winkelmaßes ein kleiner Kreis gezeichnet.
>
> $$1°$$

Für die verschiedenen Winkel haben sich Bezeichnungen eingebürgert:

Winkelmaß	**Bezeichnung**
$0° \dots 89°$	Spitzer Winkel
$90°$	Rechter Winkel
$91° \dots 179°$	Stumpfer Winkel
$180°$	Gestreckter Winkel
$181° \dots 359°$	Überstumpfer Winkel
$360°$	Voller Winkel

[5] Genauer Altgrad!

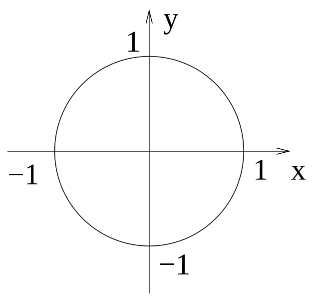
Für noch genauere Angaben kann ein Winkel von einem Grad nun noch in 60 **Gradminuten** unterteilt werden. Die Gradminuten werden hinter die Winkelangabe geschrieben und mit einem Strich versehen: $2°13'$ sind 2 Grad, 13 Minuten[6]
Reicht selbst die Angabe von Gradminuten nicht aus, dann kann eine Gradminute noch in 60 **Gradsekunden** eingeteilt werden. Diese wird mit zwei Strichen geschrieben: $13°5'25''$ bedeuten 13 Grad, 5 (Grad)Minuten und 25 (Grad)Sekunden.
Mit Angaben von Grad, Gradminuten und Gradsekunden kann eine Position auf der Erdoberfl”ache bis auf 30m genau[7] angegeben werden.

7.2.1.2 Bogenmaß

Die Angabe von Winkeln mit Graden ist zwar für den Alltagsgebrauch vollkommen ausreichend und auch im Bereich der Navigation[8] genügen die Gradangaben vollkommen.
Trotzdem hat die Angabe von Grad auch Nachteile:

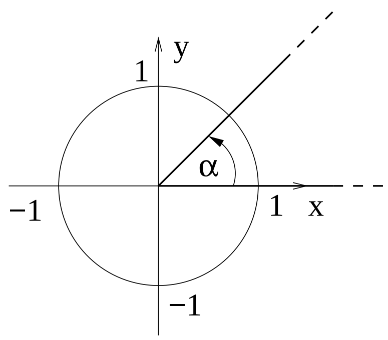
1. Mit einer Gradangabe ist in der Regel keine (Dreh)Richtung verbunden. Diese muss zusätzlich mit angegeben werden.
2. Winkel, die größer als 360° sind, können nicht angegeben werden, obwohl sie, etwa bei Drehungen durchaus vorkommen können.
3. Gradangaben bestehen aus einer Zahl und der Angabe, dass es sich um ein Winkelmaß handelt, in der Regel der kleine Kreis. Damit können sie aber weder Funktionsargument noch Funktionswert sein, da, wie das Kapitel über Funktionen noch zeigen wird, Funktionen immer Zahlen bekommen und auch immer solche ausgeben.

Der drittgenannte Nachteil scheint ein bisschen '*akademisch*' zu sein, da aber die Lösung der ersten beiden Nachteile sofort zu Zahlen[9] für die Angabe von Winkeln führt, braucht uns dieser Nachteil auch nicht sonderlich beschäftigen.
Ausgangspunkt für die Winkelangabe im **Bogenmaß** ist der **Einheitskreis**! Dieser Kreis hat einen Radius von Eins und sein Kreismittelpunkt ist der Ursprung eines Koordinatensystems.



In diesen Einheitskreis werden nun Winkel folgendermaßen eingetragen:

1. Der eine Schenkel ist grundsätzlich die rechte Halbachse der x-Achse.
2. Der zweite Schenkel wird **gegen** den Uhrzeigersinn in den Einheitskreis eingetragen.



[6] Wenn klar ist, dass es sich um eine Winkelangabe handelt, dann kann das '*Grad*' vor Minute auch weggelassen werden.
[7] In der Näheder Pole noch besser.
[8] Die Erde ist nun mal dummerweise eine Kugel und da sind Gradangaben (fast) die einzige Möglichkeit eine Position angeben oder bestimmen zu können.
[9] Und eben keine Gradzahlen.

Wie wird nun die Größe des Winkels angegeben?
Ein Teil der Kreislinie des Einheitskreises liegt zwischen den Schenkeln des Winkels, der andere außerhalb.

> Das **Bogenmaß** eines Winkels ist gleich der Länge der Kreislinie des Einheitskreises, die zwischen den Schenkeln des WInkels liegt.

Da der Radius des Einheitskreises Eins ist, kann auch die Länge seiner Kreislinie berechnet werden. Nach der obigen Formel für Kreise ist sie gleich: $U = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$.
Der Rest ist jetzt einfacher Dreisatz. Wenn 360° 2π entspricht, dann entspricht 180° eben π, und so weiter.
Generell gilt:

$$\text{Grad} = \frac{\text{Bogenmaß} \cdot 180}{\pi}$$

und

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$

Nun ist es einfach möglich auch Winkel anzugeben, die größer als 360° (beziehungsweise 2π) sind und auch die DDrehrichtung des Winkels kann angegeben werden. Ist die Angabe positiv, dann wurde oben gesagt, dass es sich um eine Drehung nach links handelt[10]. Eine Drehung nach rechts wird mit einer negativen Angabe gemacht. Und weil die Einheit des Einheitskreises keine Maßeinheit[11] hat, hat es auch die Angabe des Winkels nicht, es ist eine einfache Zahl, die nun auch bei Funktionen eingesetzt werden kann.

7.2.2 Umgang mit Grad und Bogenmaß

Geht es, vor allem im Leistungskurs, um trigonometrische Funktionen, dann werden in aller Regel die Winkel im Bogenmaß angegeben.
Bei Aufgaben zu *normaler* Geometrie[12] wird man eher mit den gängigeren Gradangaben arbeiten (wollen).
Es ist dabei außerordentlich wichtig, dass der Taschenrechner auf das richtige Winkelmaß eingestellt ist, weil sonst Zahlwerte heraus kommen werden, die geradezu absurd erscheinen[13].
Die Bezeichnungen bei den meisten Taschenrechnern[14] lauten:

RAD Für Bogenmaß (vom englischen 'Radians'), und
DEG Für Grad (vom englischen 'Degree').

7.3 Wichtige Sätze

7.3.1 Innenwinkelsatz für Dreiecke

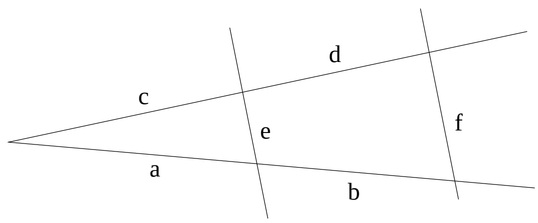
Ein Satz, der bisweilen auch in der Oberstufe vofrkommt, ist der sogenannte Innenwinkelsatz für Dreiecke, danach ist:

> Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt immer 180°

10 Gegen den Uhrzeigersinn.
11 Wie Meter oder Zentimeter
12 So Kreise, Dreiecke, Vierecke und so'n Zeugs.
13 So sind die $360°$ im Bogenmaß $2\pi \approx 6,28$. Erwartet man also etwa einen Winkel von ungefähr $360[°]$ und erhält eine Zahlangabe des Taschenrechners in der Nähe der Sechs, dann ist das schon verwirrend.
14 Wie es eingestellt wird, ist von Taschenrechner zu Taschenrechner zu unterschiedlich, als dass das hier behandelt werden könnte.

7.3.2 Strahlensätze

Die beiden Strahlensätze beziehen sich auf sogenannte Strahlensatzfiguren, die aus mindestens zwei Strahlen mit einem gemeinsamen Ausgangspunkt bestehen, sowie mindestens zwei Parallelen, die diese beiden Strahlen schneiden. Im einfachsten Fall sieht eine solche Strahlensatzfigur folgendermaßen aus:



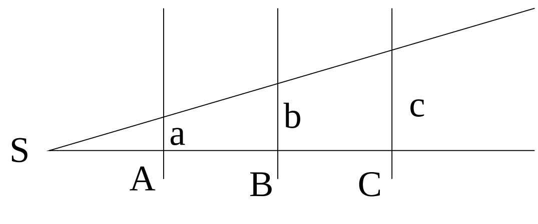
Wie man erkennt werden so sechs Abschnitte (Strecken) festgelegt, von denen vier auf den Strahlen liegen (a, b, c und d, die sogenannten Strahlenabschnitte) und zwei auf den Parallelen (e und f auf den sogenannten Parallelenabschnitten).
Der erste Strahlensatz besagt:

> In einer Strahlensatzfigur entspricht das Verhältnis der Strahlenabschnitte auf dem einen Strahl dem Verhältnis der Strahlenabschnitte auf dem anderen Strahl.
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Dieser erste Strahlensatz hat in der Mathematik der Oberstufe keine besondere Bedeutung, dennoch soll daraufhingewiesen werden, dass man mit der sogenannten '*Verhältnisgleichung*' praktisch alle Aufgaben zum Dreisatz, zur Prozent- und Zinsrechnung deutlich schneller und einfacher berechnen kann, als mit anderen Methoden. Für genauere Informationen wende dich an deinen Mathematiklehrer.
Deutlich wichtiger ist der sogenannte 2. Strahlensatz:

> Das Verhältnis eines Parallelenabschnitts zu seiner Entfernung zum Schnittpunkt der beiden Strahlen ist gleich dem Verhältnis des anderen Parallelenabschnitts zu dessen Abstand vom Schnittpunkt der beiden Strahlen, gemessen auf **dem gleichen Strahl**!
> $$\frac{e}{a} = \frac{f}{a+b}$$
> $$\frac{e}{c} = \frac{f}{c+d}$$

So mag dieser zweite Strahlensatz etwas '*akademisch*' erscheinen. Etwas klarer wird es, wenn man sich die folgende Figur ansieht, die ebenfalls eine Strahlensatzfigur darstellt.



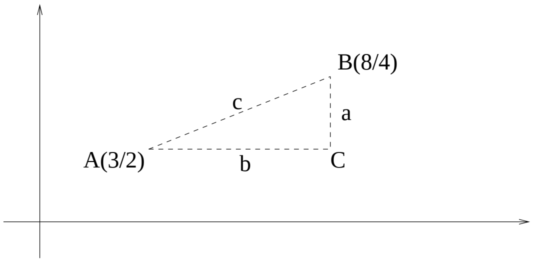
Die Parallelenabschnitte sind mit 'a', 'b' und 'c' bezeichnet und darüber hinaus sollen die Abstände zweier benachbarter Punkte immer gleich sein, was bedeutet, dass S von A genau so weit entfernt ist wie A von B und B von C. Anders ausgedrückt ist B von S doppelt soweit entfernt wie A und C dreimal so weit wie A.
Da nun B doppelt so weit von S entfernt ist, wie A, folgt nach dem 2. Strahlensatz daraus, dass auch b doppelt so lang ist wie a. Vollkommen analog ist c dreimal so lang wie a.

7.3.3 Satz des Pythagoras

Rechtwinklige Dreiecke haben einen Innenwinkel von 90°. Daraus ergibt sich, dass die beiden anderen Winkel kleiner sein müssen[15]. Da nun aber in einem Dreieck auch immer dem kleinsten Winkel die kürzeste Seite gegenüber liegt, und dem größten die längste, folgt daraus, dass in einem rechtwinkligne Dreieck gegenüber dem rechten Winkel die längste Seite des Dreiecks liegen muss. Diese wird **Hypotenuse** genannt, während die beiden anderen Seiten **Katheten** heißen[16].
Für derartige Dreiecke gilt:

> In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Diesen Satz kann man zum Beispiel sehr gut dazu verwenden den Abstand zweier Punkte in einem Koordinatensystem zu berechnen.
Betrachtet man etwa das folgende Bild:



dann erkennt man zunächst die beiden Punkte $A(3/2)$ und $B(8/4)$. Ihr horizontaler Abstandist b und ihr vertikaler Abstand a. Der eigentlich gesuchte Abstand ist c.
Der horizontale Abstand lässt sich aus den Koordinaten der beiden Punkte leicht berechnen: $ab = 8 - 3 = 5$. Es ist also 'nur' der Unterschied der x-Koordinaten. Entsprechend ergibt sich aus den y-Koordinaten der Punkte der vertikale Abstand: $a = 4 - 2 = 2$.
Darüber hinaus bilden die eingezeichneten Verbindungslinien ein rechtwinkliges Dreieck, so dass der Satz des Pythagoras gilt und damit kann dann der gesuchte Abstand berechnet werden:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 2^2 + 5^2 \\ c^2 &= 4 + 25 \\ c^2 &= 29 \\ c &= \sqrt{29} \approx 5,4 \text{ Längeneinheiten} \end{aligned}$$

Die Maßeinheit, die oben angegeben wurde, ermöglicht maximale Flexibilität. Wäre eine Einheit des Koordinatensystems ein Kilometer, dann wäre der Abstand der Punkte ungefähr 5,4km. Wäre sie ein Zentimeter, dann wäre der Abstand ungefähr 5,4cm.

7.4 Fachbegriffe

Dreieck
: Einfachste Fläche, die in der Geometrie möglich ist. Es besteht aus drei Punkten, die nicht alle in einer Geraden liegen und ihren Verbindungsstrecken, die Seiten genannt werden.

Gerade
: Eine beidseitig unendlich lange gerade Linie. Man erhält eine Gerade, wenn man die beiden Enden einer Strecke unendlich weit verlängert.

Kreis
: Die Menge aller Punkte, die von einem Mittelpunkt gleich weit entfernt ist.

Punkt
: Kleinstes geometrisches 'Objekt'. Ein Punkt besitzt keine Ausdehnung und gibt in der Regel nur einen Ort an.

[15] Eine direkte Folge des Innenwinkelsatzes.

[16] Für den Satz des Pythagoras werden die beiden Katheten nicht weiter unterschieden.

Quadrat
: Ein Viereck mit mindestes einem rechten Winkel, dessen Seiten alle gleich lang sind.

Rechteck
: Ein Viereck mit mindestens einem rechten Winkel, dessen jeweils gegenüber liegenden Seiten gleich lang sind.

Strahl
: Eine gerade Linie mit einem Anfangs- aber keinem Endpunkt. Einseitig setzt sich ein Strahl unendlich weit fort.

Strecke
: Eine Strecke ist die kürzeste, gerade Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Die Punkte begrenzen die Strecke, so dass diese einen Anfang und ein Ende hat.

Viereck
: Jede geometrische Figur, die aus vier Punkten besteht, die benachbart jeweils durch Strecken verbunden sind.

II Analysis

Keine Panik!

8 Funktionen

Das nun folgende Teilgebiet der Mathematik heißt 'Analysis' und beschäftigt sich mit Funktionen. In diesem Kapitel sollen zunächst die wichtigsten Eigenschaften und Begriffe um Zusammenhang mit Funktionen dar- und vorgestellt werden.

8.1 Was ist eine Funktion?

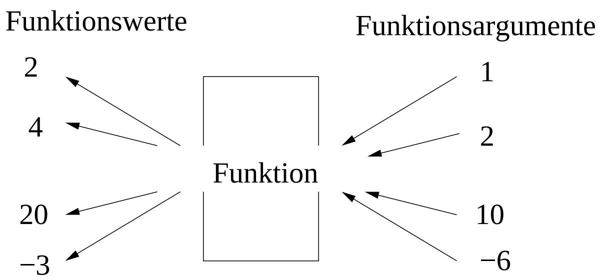
So seltsam es sich anhören mag, aber was eine Funktion ist, kann man eigentlich gar nicht genau sagen. Nur einige Dinge sind bekannt:

1. Eine Funktion erhält eine **Eingabe**, die **Funktionsargument** genannt wird.
2. Die Funktion macht *irgendwas* mit dieser Eingabe.
3. Die Funktion gibt eine **Ausgabe** aus, die **Funktionswert** genannt wird.

Bei mathematischen Funktionen gibt es noch zwei Besonderheiten: Das Funktionsargument und der Funktionswert sind **Zahlen**. Und es ist bei mathematischen Funktionen von besonderer Bedeutung, dass auch nur **eine** Zahl als Funktionswert von der Funktion ausgegeben wird.
Zusammenfassend lässt sich das folgendermaßen darstellen:

$$\text{Funktionswert} \quad \longleftarrow \quad \text{Funktion} \quad \longleftarrow \quad \text{Funktionsargument}$$

Für die folgenden Überlegungen soll eine bestimmte Funktion einmal genauer unter die Lupe genommen werden. Was sie macht, zeigt das folgende Bild:



Offenbar handelt es sich um die **Verdoppelungsfunktion**, man mache sich aber klar, dass damit noch nichts darüber ausgesagt ist, **wie** die Funktion das macht. Es ist alleine eine Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Funktionsargument und -wert.
Was **in** einer Funktion geschieht, kann durch eine sogenannte **Funktionsgleichung** beschrieben werden. Dabei wird für das Funktionsargument in der Regel die Variable x verwendet. Für den Funktionswert wird in der Funktionsgleichung entweder die Variable y verwendet, oder, was in mancher Hinsicht besser ist: $f(x)$ (gesprochen: f-von-x).
Beispiele für Funktionsgleichungen der Verdopplungsfunktionen sind etwa:

$$f(x) = 2x$$
$$f(x) = x + x$$
$$f(x) = \sqrt{4x^2}$$

Es ließen sich noch beliebig viele weitere Beispiele finden.

8.2 Funktionsdarstellungen

Ohne, dass es ausdrücklich gesagt worden wäre sind damit schon zwei Formen der Darstellungen für Funktionen vorgestellt worden. Die erste (und oftmals auch wichtigste) ist die

8.2.1 Funktionsgleichung

Eine Funktionsgleichung unterscheidet sich von anderen mathematischen Gleichungen dadurch, dass sie nicht *gelöst* werden kann, da sie zwei Variablen enthält, eine für das Funktionsargument (x) und eine für den Funktionswert ($f(x)$)[1].

Die Verwendung einer Funktionsgleichung unterscheidet sich also von der anderer Gleichungen. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen Funktionsargument und Funktionswert in der Weise, dass wenn man eine der Variablen (normalerweise x) durch eine Zahl ersetzt, sich dann die andere Zahl ergibt. Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet man noch einmal die Funktionsgleichung der Verdoppeltungsfunktion:

$$f(x) = x + x$$

Will man nun etwa wissen, welcher Funktionswert zu einem bestimmten Funktionsargument gehört, dann ersetzt man alle vorkommenden xe in der Funktionsgleichung durch die gewählte Zahl. Der Funktionswert ergibt sich dann durch einfache Rechnung.

Will man etwa wissen, welchen Wert die (Verdopplungs)Funktion für das Argument '4' ergibt, dann ersetzt man zunächst alle xe durch 4:

$$f(4) = 4 + 4$$

Nun kann der Funktionswert leicht zu 8 berechnet werden[2].

Aber auch der umgekehrte Weg ist denkbar. Will man etwa wissen, welche Zahl man in die Funktion einsetzen muss, damit man 100 erhält, dann ersetzt man die Funktionswert-Variable ($f(x)$) durch die 100 und kann dann x ausrechnen:

$$\begin{aligned} 100 &= x + x \\ 100 &= 2x \\ 50 &= x \end{aligned}$$

8.2.2 Wertetabelle

Auch die Wertetabelle ist oben in einer Abbildung schon vorgestellt worden. Eine Wertetabelle enthält (zumeist) mehrere Funktionsargumente und die dazu gehörigen Funktionswerte. Für die Verdopplungsfunktion könnte das folgendermaßen aussehen:

Funktionsargument	1	2	3	10	100
Funktionswert	2	4	6	20	200

Spaltenweise kann man nun ablesen, welcher Funktionswert (unten) zu welchem Funktionsargument gehört. So gehört zur '1' (Argument) der Wert '2', zur '100' die '200'.

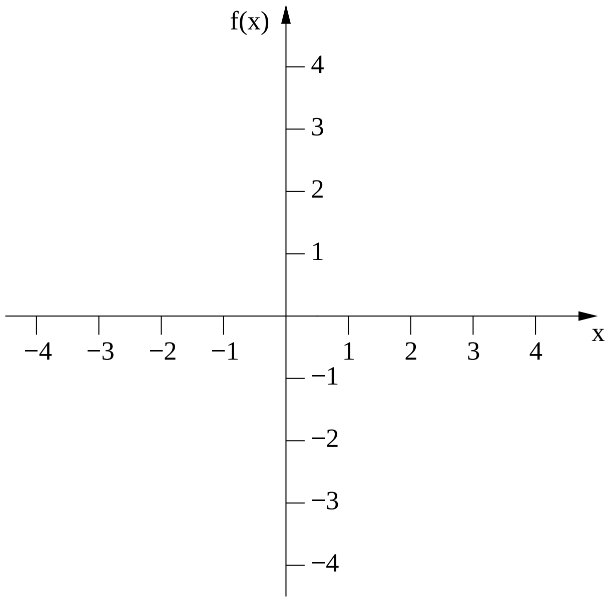
8.2.3 Funktionsgraph

Der Umstand, dass bei einer Funktion immer zwei Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt werden (Funktionsargument $\leftrightarrow$ Funktionswert) erlaubt es, diesen Zusammenhang in einem sogenannten Funktionsgraphen darzustellen. Diese Form der Darstellung einer Funktion ist für Menschen sehr gut les- und damit nutzbar.

Die grundsätzliche Vorgehensweise ist dabei die folgende: Zunächst wird ein sogenanntes Koordinatensystem gezeichnet. Dieses besteht aus einer waagerechten x-Achse und einer senkrechten y- oder $f(x)$-Achse:

[1] Mitunter wird auch die Variable y an Stelle der Variablen für den Funktionswert verwendet. Gerade im graphischen Zusammenhang kann das Vorteile haben. Die f-Schreibweise hat aber so viele Vorteile, dass sie auch hier durchgängig verwendet werden soll.

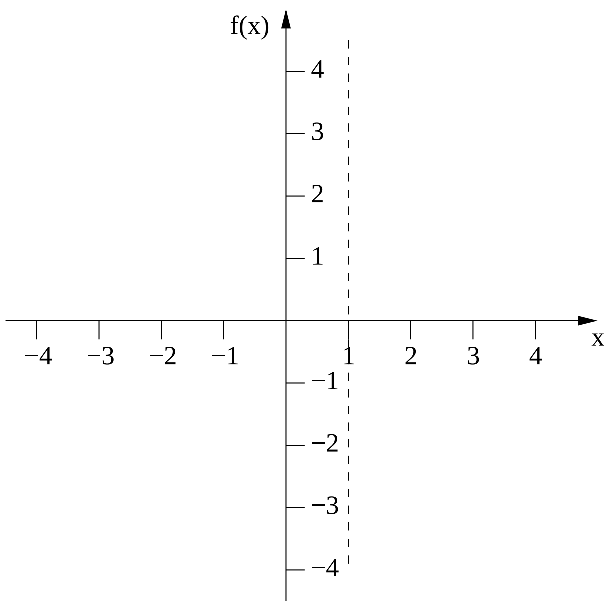
[2] Hier ist ein Vorteil der f-Schreibweise erkennbar. 'f(x)' gibt die allgemeine Rechenvorschrift an, während ein spezieller Wert (im Beispiel der für x=4) durch etwa 'f(4)' angegeben werden kann.



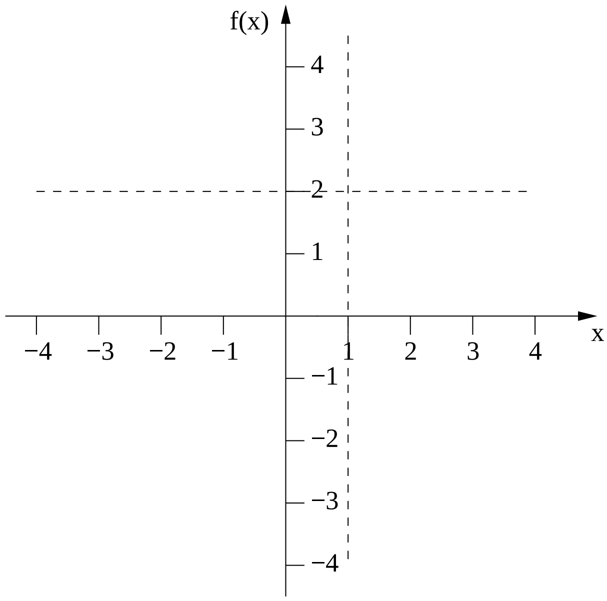
Der Kreuzungspunkt wird auch **Ursprung** genannt und bezeichnet den Punkt, an dem alle darstellbaren Werte (x und $f(x)$) Null sind.

Will man nun einen weiteren Punkt in das Koordinatensystem eintragen, dann ergibt der x-Wert des Punktes wie weit nach rechts oder links der Punkt eingetragen werden muss.

Betrachtet man etwa das Zahlenpaar (1/2), der ja Funktionsargument (1) und Funktionswert (2) der Verdopplungsfunktion ist. Die '1', die für das Funktionsargument steht, gibt an, dass der Punkt um eine Einheit rechts vom Ursprung liegen muss:



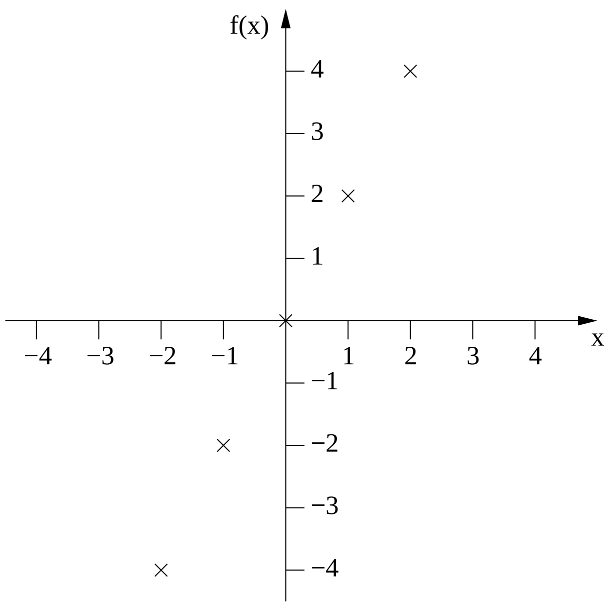
Der zweite Wert, also hier der Funktionswert, gibt an, wie weit nach oben oder unten der Punkt liegen muss. Die '2' aus dem Beispiel gibt etwa an, dass der Punkt zwei Einheiten oberhalb des Ursprungs liegen soll:



Nun dürfte klar sein, wo der Punkt liegen muss, der das Zahlenpaar (1/2) repräsentiert. Macht man noch einmal eine neue Wertetabelle für die Verdopplungsfunktion, dann könnte man etwa erhalten:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-2	0	2	4

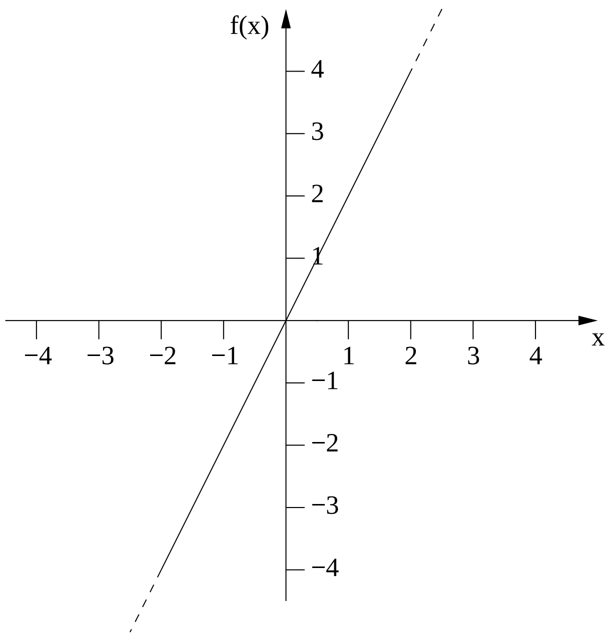
Trägt man alle Punkte dieser Wertetabelle in den obeigen Graphen ein und ersetzt dabei die gestrichelten Linien einfach durch ihren Kreuzungspunkt, dann ergibt sich:



Ein großer Nachteil der Wertetabelle besteht natürlich darin, dass man nur eine begrenzte Anzahl von Werten bei den Funktionsargumenten zur Verfügung hat. Bei obiger Tabelle fehlen etwa alle 'Zwischenwerte', wie 1.5, 2.5, aber auch 1.7 usw. Diesen Nachteil kann man im Funktionsgraphen umgehen. Oftmals erkennt man schon aus wenigen Punkten den eigentlichen Charakter des Funktionsgraphen und ist in der Lage ich vollständiger zu zeichnen, als die Wertetabelle eigentlich hergibt.

Bei obigem Beispiel liegen die eingetragenen Punkte offenbar alle auf einer Geraden und die kann dann auch als (eigentlicher) Funktionsgraph gezeichnet werden[3].

[3] Das ist nicht immer so, aber Ausnahmen kommen erst später.



8.3 Zusammenfassung

Auch wenn man im eigentlichen Sinne nicht wissen kann, was eine Funktion eigentlich tut, kann man mit den drei Darstellungsmöglichkeiten **Funktionsgleichung**, **Wertetabelle** und **Funktionsgraph** schon eine Menge damit anstellen.
Der Hauptgang der Überlegungen in der Analysis wird dabei sein, dass eine Funktionsgleichung gegeben ist (woher auch immer) und daraus der Graph möglichst einfach abgeleitet werden soll[4].

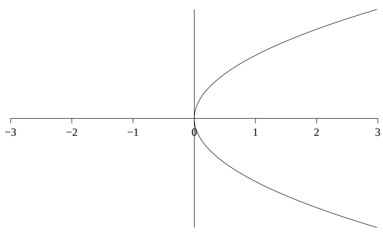
Aufgaben

A59. Erstelle für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle für die x-Werte von -3 bis 3.

a)	$f(x) = 2x$	b)	$f(x) = 3x - 2$
c)	$f(x) = x^2$	d)	$f(x) = -x^2 + 3x - 1$

A60. Erstelle für die Funktionen der letzten Aufgabe den Graph der Funktion.

A61. Gegeben ist der folgende Graph:



Gib begründet an, wieso es sich dabei **nicht** um den Graph einer Funktion handeln kann.

8.4 Funktionstypen

Grob gesagt kann man ausdrücken, dass Funktionen danach gegliedert werden, was mit dem Funktionsargument passiert. Taucht es nur in Potenzen auf (x^2, x^3, …), dann nennt man die Funktionen rational. Steht das 'x' unter einer Wurzel, dann handelt es sich um eine Wurzelfunktion, steht es in einem sin oder cos, dann ist es eine trigonometrische Funktion und wenn es als Exponent vorkommt, dann handelt es sich um eine Exponentialfunktion, um nur einmal einige Namen zu nennen.
Die für den schulischen Bereich relevanten Funktionstypen sollen nun vorgestellt werden. Sollten manche Zusammenhänge nicht oder nicht vollständig erfasst werden, ist das nicht so schlimm, weil alle Funktionstypen ja im Verlaufe des kommenden Unterrichts nochvollständig besprochen werden.

[4] Die Wertetabelle ist nur ein Werkzeug, es gibt auch noch andere.

8.4.1 Ganzrationale Funktionen

Die einfachste Gruppe von Funktionen sind die sogenannten ganzrationalen Funktionen. Bei ihnen steht das Funktionsargument ausschließlich in Potenzen. Bei den ganzrationalen Funktionen gilt zusätzlich, dass diese Potenzen (von x) **nicht** als Teiler/Divisor vorkommen.

8.4.1.1 Allgemeine

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion ist[5]:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

Das sieht nun erst mal ziemlich verwirrend aus und daher soll die rechte Seite der Funktionsgleichung[6] etwas genauer betrachtet werden. Zunächst einmal handelt es sich um einen Summenterm[7]. Jeder Summand hat dabei die Form:

$$\ldots a_? x^? \ldots$$

Das Fragezeichen steht dabei zunächst mal für irgendeine Zahl (im Funktionsterm kommen unterschiedliche vor). Wenn man nun noch weiß, dass das '$a_?$' einfach nur (irgendeine) Zahl bezeichnet, dann wird die Sache schon klarer: Jeder einzelne Summand besteht aus einer Potenz von x, die mit einer Zahl multipliziert wird. Macht man das Ganze mal mit Zahlen, dann könnten die Summanden etwa sein:

$$2x^2 \qquad -3x^5 \qquad 17x^4 \qquad \ldots$$

Tja, und diese Teile (Teilterme) werden dann nur noch addiert.
Üblicherweise gibt es einen höchsten Exponenten bei x, diesen nennt man dann den **Grad** der Funktion. Betrachtet man etwa die (einfache) Funktion:

$$f(x) = x^2 + 3x^1 + 7x^0$$

dann hat man eine ganzrationale Funktion vom Grad 2, weil die höchste Potenz eben die 2 ist, und mit

$$f(x) = 3x^5 + 2x^4 + 13x^3 + [1]x^2 + 8x^1 + 12x^0$$

eine vom Grad 5.

Tipps zur Schreibweise

Wird eine Potenz mit 1 multipliziert, wie etwa das 'x^2' im letzten Beispiel, dann schreibt man die 1 normalerweise nicht aus[8].
Außerdem ist x^1 das gleiche wie ein einfaches x, so dass man das ^{1} normalerweise einfach weglässt. Schließ;ich ist $x^0 = 1$, wie jede Zahl hoch 0 Eins ist. Im letzten Beispiel hätte man am Ende also statt $\ldots + 12x^0$ einfacher $\ldots + 12 \cdot 1$ oder noch einfacher: $\ldots + 12$ schreiben können und macht das auch meistens.
Die beiden letzten Beispiele würden also im Normalfall so geschrieben:

$$f(x) = x^2 + 3x + 7$$
$$f(x) = 3x^5 + 2x^4 + 13x^3 + x^2 + 8x + 12$$

Sind eine oder einige der Zahlen, mit denen die Potenzen multipliziert werden gleich Null, dann lässt man gleich die ganze Potenz weg, so kann man statt:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 0x + 7$$

auch schreiben

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 7$$

Da weiterhin die Addition einer negativen Zahl auch als Subtraktion geschrieben werden kann, kann auch

$$f(x) = x^2 + (-3)x + 7$$

einfacher als

$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$

geschrieben werden.
Die ganzrationalen Funktionen werden nun noch weiter eingeteilt, je nachdem, welchen Grad sie haben. Wir fangen mit den einfachsten an:

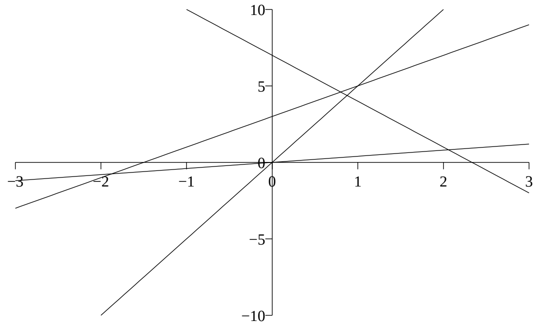
5 Das sieht jetzt gleich schlimm aus, ist aber eigentlich ganz einfach.
6 Der sogenannte Funktionsterm.
7 Viele einzelne Teile, die dann addiert werden.
8 Daher auch die eckigen Klammern um die 1.

8.4.1.2 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind ganzrationale Funktionen vom Grad 1. Die höchste Potenz von x, die also vorkommt ist: x^1, oder eben x. Somit sind die folgenden Funktionen alle lineare Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x + 3 \\
f(x) &= -3x + 7 \\
f(x) &= \frac{2}{5}x - \frac{1}{7} \\
f(x) &= 5x + 0 \quad \Leftrightarrow f(x) = 5x
\end{aligned}
$$

Ihre Graphen sind einmal in einem Koordinatensystem dargestellt:



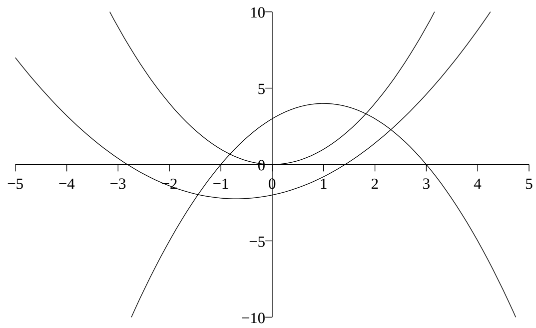
Ohne hier im Detail darauf einzugehen welcher Graph nun zu welcher Funktion gehört fällt schon einmal auf, dass alle Funktionsgraphen Geraden sind. Es gibt also nicht nur eine Übereinstimmung im Aufbau (höchste Potenz = 1), sondern auch eine bei den Graphen.

8.4.1.3 Quadratische Funktionen

Analoges zeigt sich auch bei den quadratischen Funktionen. Quadratische Funktionen sind ganzrationale Funktionen zweiten Grades. Beispiele für quadratische Funktionen sind:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \quad \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 0x + 0 \\
f(x) &= 0.5x^2 + 0.7x - 2 \\
f(x) &= -x^2 + 2x + 3
\end{aligned}
$$

Ihre Graphen sind in folgendem Koordinatensystem dargestellt:



Auch hier ähneln sich die Graphen. Sie werden **Parabeln** genannt, die nach oben oder unten geöffnet sein können (genaueres, wenn diese Funktionen besprochen werden).

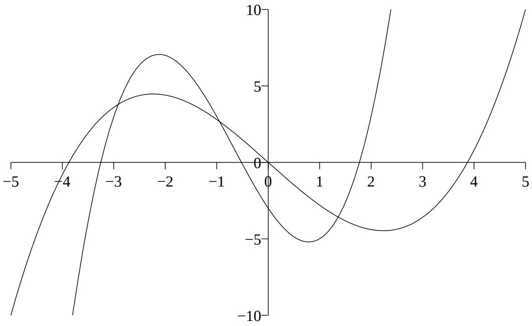
8.4.1.4 Funktionen höheren Grades

An weiteren ganzrationalen Funktionen kommen (eigentlich) nur noch die dritten oder vierten Grades vor, Sie haben keine eigene Namen mehr[9] und auch ihre Graphen haben keine eigenen Namen mehr. Trotzdem sollen hier einige Funktionsgraphen und die dazu gehörigen Funktionsgleichungen vorgestellt werden.
Dritten Grades sind etwa:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x \\
f(x) &= \frac{1}{5}x^3 - 3x
\end{aligned}
$$

Mit den Graphen:

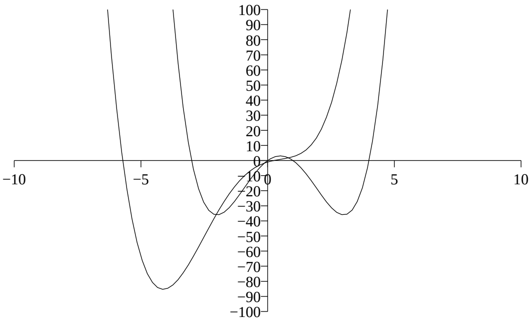
[9] In älteren Büchern findet man für ganzrationale Funktionen dritte Grades noch die Bezeichnung: Kubische Funktionen.



Vierten Grades sind etwa die Funktionen:

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

und ihre Graphen sind:

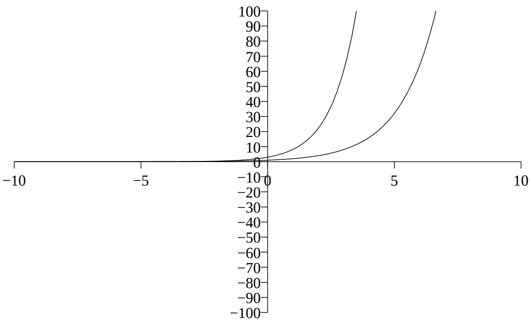


Auch wenn diese Funktionen hier noch nicht so eindringlich besprochen werden, können sie aber schon dazu dienen, zu erklären, wieso all diese Funktionen in einer Gruppe, eben den 'ganzrationalen Funktionen', zusammen gefasst werden.
Bestand der Graph einer linearen Funktion aus einer Geraden (Grad: 1, Kurven: 0), und der einer quadratischen Funktion aus einer Parabel (Grad: 2, Kurven: 1). So kann man erkennen, dass Graphen von Funktionen dritten Grades aus zwei Kurven und die vierten Grades aus drei Kurven bestehen. Wenn man sich die Graphen genauer ansieht, findet man vielleicht noch mehr Regelmäßigkeiten.

8.4.2 Exponentialfunktionen

Wie schon oben gesagt steht bei Exponentialfunktionen die Variable x, das Funktionsargument im Exponenten einer Basis. Eine sehr wichtige Funktion dieser Reihe ist die zur Basis e, der Eulerschen Zahl. Details kommen hier auch später.

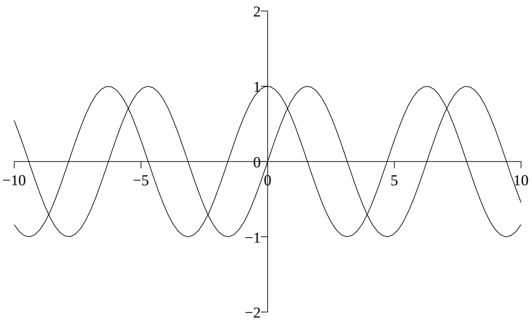
$$f(x) = 2^x$$
$$f(x) = 3e^x$$



8.4.3 Trigonometrische Funktionen

Die sogenannten trigonometrischen Funktionen werden ausführlich nur im Leistungskurs behandelt. Trotzdem sollen sie und ihre Funktionsgraphen hier kurz vorgestellt werden.

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f(x) = \cos(x)$$

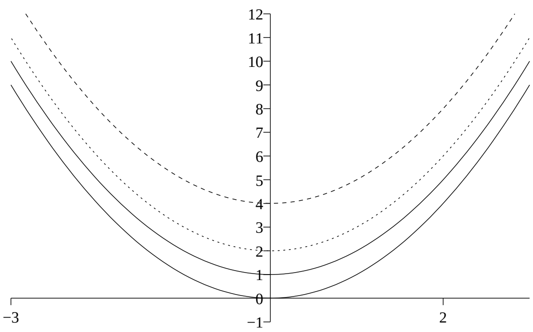


8.5 Funktionsscharen

Mitunter kann es sinnvoll sein, nicht nur **eine**, sondern sofort eine ganze Gruppe von Funktionen zu betrachten, die gewisse Eigenschaften in ihrer Funktionsgleichung gleich haben.
So könnte man sich beispielsweise für alle Funktionen interessieren, bei denen zum Funktionsterm 'x^2' noch eine beliebige Zahl addiert wird. Diese Zahl wird üblicherweise durch die Variable 'k' beschrieben, so dass sich der Funktionsterm: '$x^2 + k$' ergibt.
Da sich für jedes andere 'k' eine andere Funktion ergibt, wird entweder die Variable k oder ihr Wert an das 'f' des Funktionsnamens angefügt:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x^2 + k \\ f_1(x) &= x^2 + 1 \\ f_{10}(x) &= x^2 + 10 \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

In vielen Fällen kann oftmals die ganze Gruppe von Funktionen, die Funktionsschar, 'in einem Rutsch' behandelt werden. Untersucht man etwa die Funktionen des obigen Beispiels, dann ergibt sich, dass alle Funktionen der Schar eine Parabel als Funktionsgraph haben, deren y-Achsen-Abschnitt auf der y-Achse liegt.
Für $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ und $k = 4$ sind die Funktionsgraphen hier einmal gezeichnet:



8.6 Fachbegriffe

Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen haben die Form:

$$f(x) = c \cdot a^c$$

Sie werden zur Beschreibung von Wachstumsprozessen verwendet.

Funktion

Von einer Funktion weiß man eigentlich nur, dass sie eine Eingabezahl (*Funktionsargument*) in eine Ausgabezahl (*Funktionswert*) umwandelt.

Funktionsargument

Die Zahl, die in eine *Funktion* eingesetzt wird. Sie wird in der *Funktionsgleichung* oftmals mit der Variablen 'x' bezeichnet, Die Auswahl der Zahlen, die in eine Funktion eingesetzt werden (können) ist der sogenannte *Definitionsbereich* der Funktion. Normalerweise sind es alle Zahlen, aber aufgrund der Art der Funktion, oder im Sachzusammenhang kann der Definitionsbereich auch kleiner sein.

Funktionsgleichung

Eine Gleichung mit zwei Variablen, durch die das Verhältnis von *Funktionsargument* zu *Funktionswert* beschrieben wird.

Funktionsgraph

Funktionsargument und *Funktionswert* können als Koordinaten eines Punktes angesehen werden. Trägt man viele dieser Punkte in ein Koordinatensystem ein, dann ergibt sich der Funktionsgraph.
Oftmals lassen sich Eigenschaften einer Funktion vom Funktionsgraphen viel einfacher ablesen, als es rechnerisch möglich wäre.

Funktionsschar

Eine Gruppe von Funktionen, die gewisse gemeinsame Eigenschaften haben. Üblicherweise wird das durch einen Parameter festgelegt, der in der Funktionsgleichung steht und variabel gehalten wird.

Funktionsterm

Der (normalerweise) rechte Teil einer *Funktionsgleichung*. So ist etwa in *Funktionsgleichung* '$f(x) = 2x$' das '$2x'$ der Funktionsterm.

Funktionswert

Die Zahl, die eine *Funktion* zurück gibt, wenn ihr ein *Funktionsargument* zugeführt wird. So ist etwa '4' der Funktionswert der Verdopplungsfunktion, wenn man sie mit der '2' 'füttert'.
Die Menge aller Zahlen, die als Ergebnis einer Funktion vorkommen können wird *Wertebereich* der Funktion genannt.

Ganzrationale Funktion

Eine ganzrationale Funktion besteht aus Potenzen von x, denen jeweils noch ein Faktor vorangestellt wird und die dann addiert werden. Der höchste vorkommende Exponent wird auch Grad der Funktion genannt. Allgemein lassen sich ganzrationale Funktionen schreiben als:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei ist n der Grad und a_0 der y-Achsen-Abschnitt der Funktion.

Lineare Funktion

Eine lineare Funktion ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 1. Ihr Graph ist immer eine Gerade Eine lineare Funktion lässt sich immer als:

$$f(x) = mx + n$$

schreiben, wobei 'm' die Steigung ist und 'n' der y-Achsen-Abschnitt.

Quadratische Funktion

Eine quadratische Funktion ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 2. Ihr Graph ist eine Parabel. Eine quadratische Funktion lässt sich schreiben als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Trigonometrische Funktionen

Dies sind vor allem die drei Funktionen:

$f(x) = \sin(x)$	Sinusfunktion
$f(x) = \cos(x)$	Cosinusfunktion
$f(x) = \tan(x)$	Tangensfunktion

Sie werden zur Berechnung von Schwingungsvorgängen benötigt.

Wertetabelle

Eine Tabelle in der immer das *Funktionsargument* zusammen mit seinem *Funktionswert* aufgelistet werden. Im Normalfall werden die Werte, die als *Funktionsargumente* in der Tabelle stehen sollen, mehr oder weniger willkürlich ausgewählt und die dazu gehörigen *Funktionswerte* ausgerechnet.

9 Für alle gleich

Im letzten Kapitel wurde vorgestellt, was eine Funktion überhaupt ist und die wesentlichen Funktionstypen der gymnasialen Oberstufe wurden vorgestellt. Außerdem wurde schon betont, was der wesentliche *Kern* der Aufgabe in Analysis ist: Aus einem Funktionsgraphen so viel wie möglich an Informationen über den Funktionsgraphen heraus zu bekommen wie möglich.
Auch wenn es so ist, dass viele Eigenschaften der Funktionsgraphen vom Typ der Funktion abhängen, gibt es doch auch einige Themen, die alle Funktionen und ihre Graphen gleichermaßen betreffen. Diese Themen sind in diesem Kapitel zusammen gefasst.

9.1 Definitions- und Wertemenge

Eigentlich sind die Begriffe Definitionsmenge und Wertemenge[1] recht einfach:

> Die **Definitionsmenge** einer Funktion ist die Menge der Zahlen, die in eine Funktion eingesetzt werden **kann** oder **soll**.
> Die **Wertemenge** einer Funktion ist die Menge aller Zahlen, die als Funktionswert von einer Funktion zurück gegeben werden können.

Die Tücke, liegt, wie so oft, im Detail!

9.1.1 Definitionsmenge

Betrachtet man die obige Beschreibung dessen, was eine Definitionsmenge ist, so fällt auf, dass zwei Angaben dazu gemacht werden, was eine Definitionsmenge sein kann:

1. Die Menge aller Zahlen, die in eine Funktion eingesetzt werden **kann**.
2. Die Menge aller Zahlen, die in eine Funktion eingesetzt werden **soll**.

Der Unterschied scheint nur gering zu sein, aber in der Anwendung ergeben sich zum Teil erhebliche Konsequenzen[2]

9.1.1.1 Die Zahlen, die eingesetzt werden können

Bei den Rechenoperationen für Zahlen gibt es einige, die '*verboten*' sind, so dürfte es allgemein bekannt sein, dass man nicht durch Null teilen kann[3]. Aber was heißt das eigentlich und welche Einschränkungen gibt es überhaupt[4]?
Anhand eines Beispiels, das vielleicht nicht so bekannt ist, lässt sich das schön verdeutlichen; es geht um die Potenzrechnung.
Nach den Regeln der Potzenrechnung gilt, dass eine beliebige Zahl hoch 0 immer Eins ist, es ist also: $a^0 = 1$. Wendet man diese Regel mal auf eine Reihe von Zahlen an, dann ergibt sich:

$$5^0 = 1 \quad 4^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 1^0 = 1$$

Nach einer anderen Regel der Potenzrechnung ist jede Potenz der Null wieder Null, es ist also: $0^x = 0$. Wendet man auch diese Regel auf einige Zahlen an, dann ergibt sich:

$$0^5 = 0 \quad 0^4 = 0 \quad 0^3 = 0 \quad 0^2 = 0 \quad 0^1 = 0$$

Das Problem ergibt sich dann, wenn man versucht die beiden obigen Reihen fortzusetzen. Nach der ersten Reihe (die mit dem hoch-Null), müsste gelten:

$$0^0 = 1$$

Nach der zweiten Reihe, die mit dem Null hoch..., ergäbe sich aber:

$$0^0 = 0$$

[1] Man findet auch die Bezeichnungen Definitionsbereich und Wertebereich.
[2] Vor allem im Bereich der Aufgaben im Sachzusammenhang.
[3] Ich weiß, ich weiß, ... Chuck Norris — aber der ist nicht in unserem Kurs!
[4] Besprochen werden sollen nur die Einschränkungen, die auch für die gymanialse Oberstufe relevant sind.

Nun kann aber 0^0 nicht gleichzeitig Eins und Null sein; die Regeln widersprechen sich in ihrer Konsequenz. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, erklärt die Mathematik:

$$0^0 \quad \text{ist nicht definiert}$$

oder, wenn man es einfacher haben will: 0^0 ist '*verboten*'.
Im Rahmen 'unserer' Mathematik gibt es vier Situationen, in denen es '*verboten*' ist, eine bestimmte Zahl an Stelle einer bestimmten Variablen einzusetzen — wenn das bedeutet, dass damit eine nicht definierte Rechenoperation entstehen würde:

1. Durch eine Null kann nicht geteilt werden!
2. Unter einer Quadratwurzel darf keine negative Zahl stehen, also nur positive Zahlen der die Null.
3. In einem Logarithmus muss eine positive Zahl stehen, also keine negative und auch die Null nicht.
4. In der Basis einer Potenz muss eine positive Zahl stehen, also keine negative und auch nicht die Null.

Im Normalfall sind alle Zahlen, also $\mathbb{R}$, im Definitionsbereich einer Funktion. Nur dann, wenn durch Einsetzen einer Zahl einer der 'verbotenen' Situationen entstehen würde, die oben beschrieben wurde, muss die Definitionsmenge eingeschränkt werden — es müssen die Zahlen ausgeschlossen werden, die zu der '*verbotenen*' Situation führen würden.
Bei den Funktionen, mit denen wir es in der Regel zu tun haben, spielt diese Einschränkung praktisch keine Rolle. Bei ganzrationalen Funktionen, bei Exponentialfunktionen und auch bei trigonometrischen Funktionen sind in der Regel alle Zahlen '*erlaubt*'. Daher hier nur ein paar Beispiele, in welchen Fällen davon abgewichen werden müsste[5]:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{x} & \mathbb{D} = \text{Alles außer Null} \\ f(x) = \frac{1}{x-1} & \mathbb{D} = \text{Alles außer 1} \\ f(x) = \sqrt{x+1} & \mathbb{D} = \text{Alle Zahlen größer oder gleich -1} \\ f(x) = \ln(x-3) & \mathbb{D} = \text{Alle Zahlen größer als 3} \end{array}$$

9.1.1.2 Die Zahlen, die eingesetzt werden sollen

So vergleichsweise einfach, zumal es im normalen Unterricht praktisch nicht interessiert, wie bei der Frage, welche Zahlen man in eine Funktion einsetzen **kann**, ist die Frage danach, welche Zahlen in eine Funktion eingesetzt werden **können** leider nicht.
Die Einschränkungen, denen der Definitionsbereich unterworfen ist, kommen hier meistens aus Sachzusammenhängen, die sich nicht allgemeinbeschrieben lasssen, die bei der Bearbeitung von Aufgaben aber einen sehr hohen Stellenwert haben können. Zumeist treten diese Einschränkungen in einer der beiden folgenden Arten und Weisen auf:

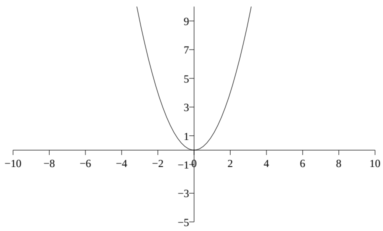
1. Bei vielen Aufgaben ist angegeben, für welche Zahlbereiche die Funktion definiert ist. Hier ist es also nicht nötig sich Gedanken darüber zu machen, welche Zahlen denn nun eingesetzt werden sollen, es ist 'nur' darauf zu achten, dass man mit seinen Lösungen diesen Bereich nicht verlässt.
2. In manchen Zusammenhängen sind nicht alle Zahlen sinnvoll.
   Angenommen eine Funktion $f(x)$ beschreibt den Gewinn eines Autoherstellers in Abhängigkeit von der Anzahl der produzierten Autos ('x').
   Offensichtlich ist es unsinnig hier von negativen Werten von 'x' auszugehen. Dies würde bedeuten, dass der Autohersteller Autos vernichtet (=eine negative Anzahl von Autos produziert).
   Auch macht es in diesem Zusammenhang keinen Sinn, Dezimalzahlen für 'x' einzusetzen. 1,2 Autos lassen sich schlecht bauen.

Unabhängig davon, wie die Einschränkung des Definitionsbereichs zustande gekommen ist, muss hier nur darauf geachtet werden, dass nur Ergebnisse, die auch im Definitionsbereich liegen, als solche genannt werden.
Ein Beispiel: Angenommen man hätte im Beispiel des obigen Autoherstellers berechnet, dass der Gewinn am größten wäre, wenn der Hersteller 350123,74 Autos baut. Hier muss man sich daran erinnern, dass die Dezimalstellen im Zusammenhang keinen Sinn ergeben. Man müsste in diesem Fall ermitteln, ob der Gewinn bei 350123 oder 350124 größer ist und diesen Wert dann als den maximal möglichen Gewinn in seiner Lösung angeben.
Derartige Einschränkungen der Definitionsmenge werden bei folgenden Beispielen noch eingehender besprochen.

[5] All die Beispielfunktionen kommen im normalen Oberstufenunterricht nicht vor.

9.1.2 Wertemenge

So, wie die Definitionsmenge die Zahlen beschreibt, die in die Funktion eingesetzt werden, die Funktionsargumente, so beschreibt die Wertemenge die Zahlen, die von der Funktion zurück gegeben werden, die Funktionswerte.
Bis auf sehr wenige Ausnahmefälle, wird die Wertemenge nicht verwendet. Trotzdem soll hier darauf eingegangen werden, wie sie beschränkt sein kann, denn, wie die Definitionsmenge, ist sie zunächst einmal nicht beschränkt, sondern umfasst auch alle reellen Zahlen.
Die Einschränkungen kommen dabei wieder von der Funktion selbst, oder sie liegen am Sachzusammenhang.
Betrachtet man den Funktionsgraphen der Funktion[6]: $f(x) = x^2$



dann erkennt man, dass alle Funktionswerte oberhalb der y-Achse liegen, also positive Werte haben (Mit Ausnahme der Berührstelle im Ursprung des Koordinatensystems). Offenbar besteht die Wertemenge dieser Funktion aus allen Zahlen, die größer oder gleich Null sind.
Wäre nun, aus dem Sachzusammenhang heraus, auch noch der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = x^2$ auf die Zahlen zwischen -2 und 2 beschränkt, dann ergäbe sich zusätzlich, dass der Wertebereich auch nach oben begrenzt ist, denn dann wäre die größte Zahl, die als Funktionswert heraus kommt die 4. Der Wertebereich wären dann alle Zahlen zwischen Null und Vier, einschließlich.

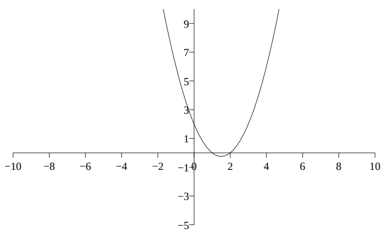
9.2 y-Achsen-Abschnitt

> Unter dem y-Achsen-Abschnitt versteht man die Zahl, bei der der Graph einer Funktion die y-Achse schneidet.

Da bei allen Punkten auf der y-Achse der x-Wert Null ist, kann der y-Achsen-Abschnitt zumeist sehr leicht berechnet werden, weil man nur Null in die Funktionsgleichung eingeben muss, was sich zumeist sehr einfach berechnen lässt[7].
Wie oben schon gesagt wurde, lassen sich ganzrationale Funktionen in der Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

schreiben. Setzt man hier $x = 0$, dann 'verschwinden' alle Potenzen von 'x' und es bleibt alleine das: $a_0 x^0 = a_0$ übrig[8]. Für den Alltagsgebrauch lässt sich daher zusammenfassen, dass bei einer ganzrationalen Funkion der y-Achsen-Abschnitt immer die (zumeist) hinten stehende Zahl ohne 'x' ist.
Betrachten wir hierzu auch noch einmal den Graphen einer quadratischen Funktion: $f(x) = x^2 - 3x + 2$:



Man erkennt deutlich, dass der Graph die y-Achse beim Wert 2, also im Punkt (0/2) schneidet.

6 Es handelt sich um eine quadratische Funktion, die im Detail noch näher behandelt werden wird.
7 Bei den trigonometrischen Funktionen muss man ein paar Werte der Funktionen kennen, dann klappt das auch ganz gut; notfalls hilft der Taschenrechner.
8 Schon früher wurde darauf hingewiesen, dass das x^0 im Regelfall gar nicht ausgeschrieben wird, da es 1 ist.

Aufgaben

A62. Bestimme den y-Achsen-Abschnitt der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = x^2 - 5x + 7$	b)	$f(x) = x^3 - 5x + 2$
c)	$f(x) = \sqrt{x}$	d)	$f(x) = (x+2) \cdot e^x$

9.3 Nullstellen

Die **Nullstelle** einer Funktion ist der x-Wert, an dem die Funktion die x-Achse schneidet.

Hier ist also nicht $x = 0$, sondern $f(x) = 0$, da auf der x-Achse alle Punkte die y-Koordinate Null haben. Im Gegensatz zum y-Achsen-Abschnitt kann eine Funktion mehr als eine Nullstelle haben, es kann aber auch sein, dass sie gar keine Nullstelle hat.

Nullstellen werden **immer** dadurch berechnet, dass man in der Funktionsgleichung das '$f(x)$' Null setzt. Dadurch erhält man eine Gleichung, die nur noch eine Variable besitzt und daher (prinzipiell) berechenbar ist.

Zum Lösen von Gleichungen findet sich im ersten Teil schon zahlreiche Hinweise. Es reicht daher hier einmal ein Beispiel zu einer Nullstellenberechnung vorzuführen:

Angenommen man wollte die Nullstellen der Funktion: $f(x) = x^2 - 8 + 7$ berechnen. Dann ersetzt man zunächst das '$f(x)$' durch Null und erhält: $0 = x^2 - 8x + 7$. Dies ist eine ganz normale quadratische Gleichung, die durch die p-q-Formel gelöst werden kann. Sie hat die Lösungen: $x = 1 \vee x - 7$ und das sind dann auch schon die Nullstellen der obigen Funktion.

Aufgaben

A63. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = 2x + 3$	b)	$f(x) = 5x - 15$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x - 7$	d)	$f(x) = x^2 - 6x + 8$

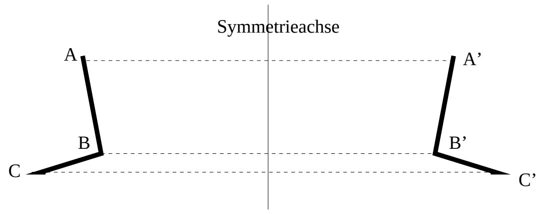
9.4 Symmetrie

In der Mathematik werden eine Unzahl von Symmetrien untersucht. Im schulischen Umfeld interessieren davon allerdings glücklicherweise nur zwei: Die **Achsensymmetrie** und die **Punktsymmetrie**

9.4.1 Achsensymmetrie

Zwei Punkte sind zueinander achsensymmetriesch, wenn sie folgende Bedingung erfüllen. Geht man von dem einen Punkt rechtwinklig auf eine Symmetrieachse zu und verlängert dann beim Erreichen dieser Achse seinen Weg genauso weit, wie es von dem Punkt bis zur Achse war. Hat man dann den anderen Punkt erreicht, dann sind diese Punkte achsensymmetrisch zu dieser Symmetrieachse.

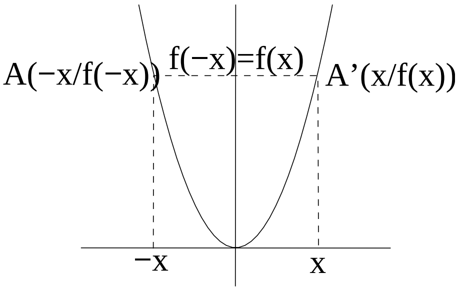
Am deutlichsten wird dies durch ein Bild. Zu sehen ist ein 'L' und seine achsensymmetrische Spiegelung.



Man erkennt deutlich, dass sich der Begriff der Achsensymmetrie mit dem alltäglichen Begriff 'Spielgelung' deckt.

9.4.1.1 Anwendung in der Schule

Im schulischen Umfeld interessiert nicht einmal die Achsensymmetrie an sich, sondern nur die **Achsensymmetrie zur y-Achse**. Wenn das nämlich der Fall ist, dann lässt sich das hervoragend mathematisch fassen und beschreiben. Betrachten wir ein Beispiel:



Man sieht die beiden zur y-Achse achsensymmetrischen Punkte A und A'. Das ihr Abstand zur Symmetrieachse gleich ist, erkennt man daran, dass sich die beiden Punkte in der x-Koordiante nur um das Vorzeichen unterscheiden. Und man erkennt unmittelbar aus dem Bild, dass eine Funktion dann achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wenn gilt:

> Der Graph einer Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle Werte von x gilt:
> $$f(-x) = f(x)$$

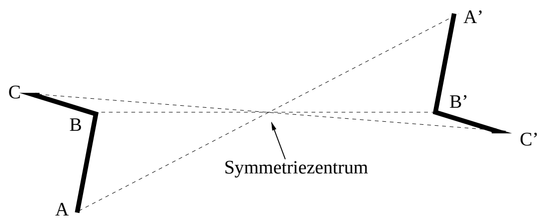
So ist zum Beispiel der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ achsensymmetrisch zur y-Achse, denn:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 \\ &= ((-1) \cdot x)^4 - 2((-1) \cdot x)^2 + 3 \\ &= (-1)^4 x^4 - 2(-1)^2 x^2 + 3 \\ &= 1 \cdot x^4 - 2 \cdot 1 \cdot x^2 + 3 \\ &= x^4 - 2x^2 + 3 = f(x) \end{aligned}$$

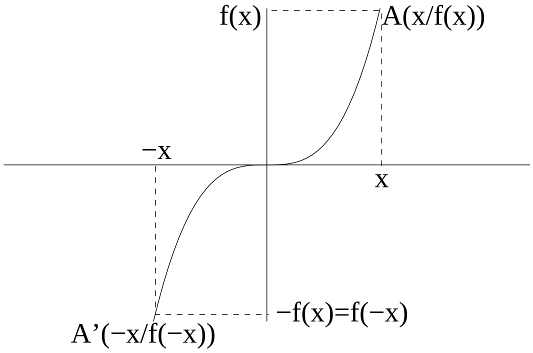
Man kann also nachweisen, dass $f(-x) = f(x)$ ist und damit ist die Bedingung für die Achsensymmetrie zur y-Achse erbracht.

9.4.2 Punktsymmetrie

Die Punktsymmetrie funktioniert ähnlich, allerdings geht man hier vom ersten Punkt aus zu einem Symmetriezentrum und von dort aus dann genau so weit weiter, bis man zu dem symmetrischen Punkt kommt. Im Gegensatz zu einer Spielgelung, wie bei der Achsensymmetrie, erschint die Punktsymmetrie eher als eine Drehung um 180°.



Und auch hier ergibt sich die Möglichkeit den Umstand der Punktsymmetrie besonders einfach und gut zu fassen, wenn das Symmetriezentrum der Ursprung des Koordinatensystems ist:



Das x und $-x$ gleich weit vom Symmetriezentrum entfernt sind, ist offensichtlich, aber es sollte auch klar sein, dass auch $f(x)$ und $f(-x)$ gleich weit vom Symmetriezentrum entfernt sind und das damit:

> Der Graph einer Funktion $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle Werte von x gilt:
>
> $$f(-x) = -f(x)$$

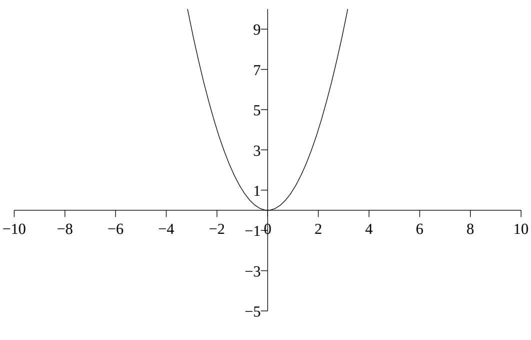
So ist etwa der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 5x$ punktsymmetrisch zum Ursprung, denn:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 5(-x) \\ &= ((-1) \cdot x)^3 - 5((-1) \cdot x) \\ &= (-1)^3 \cdot x^3 - 5 \cdot (-1) \cdot x \\ &= (-1) \cdot x^3 - 5 \cdot (-1) \cdot x \\ &= (-1)(x^3 - 5x) \\ &= -(x^3 - 5x) = -f(x) \end{aligned}$$

Auch hier konnte also nachgewiesen werden, dass $f(-x) = -f(x)$ ist und damit die Bedingung für die Punktsymmetrie zum Ursprung erbracht werden kann.

9.5 Verhalten im Unendlichen

Viele Eigenschaften der Graphen von Funktionen spielen sich 'in der Nähe' der y-Achse ab. Der y-Achsen-Abschnitt sowieso, aber auch die Nullstellen liegen meistens relativ 'nahe' an Null, vor allem, wenn man bedenkt, dass es im Koordinatensystem ja nach rechts und links beliebig weit weiter gehen kann (könnte).
Stellt man sich nun dir Frage, was denn mit den $f(x)$-Werten passiert, wenn man immer größere Werte für 'x' wählt, dann entspricht das der Frage, was mit den $f(x)$-Werten passiert, wenn 'x' in Richtung 'unendlich' läuft[9].
Auch wenn es zahlreiche Möglichkeiten gibt, sind im schulischen Umfeld in der Regel nur drei Varianten interessant. Betrachtet man etwa den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$,



[9] Das gleiche gilt natürlich auch auf der linken, negativen Seite der x-Achse.

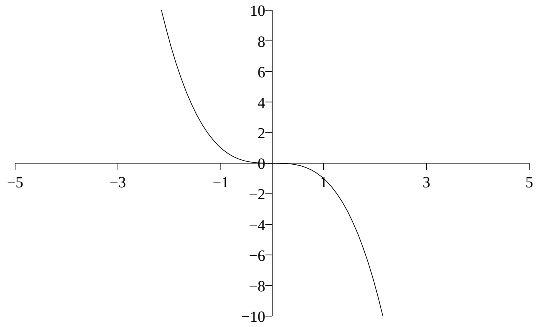
dann erkennt man, dass je mehr man auf der x-Achse nach rechts geht, desto mehr geht der Funktionsgraph und damit die $f(x)$-Werte nach oben. Man schreibt das:

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

Und spricht es: "$f(x)$ gegen unendlich für x gegen unendlich"[10].
Nur der Vollständigkeit halber könnte man bei der obigen Funktion auch sagen:

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ für } x \longrightarrow -\infty$$

denn bei ihr gehen die Funktionswerte (der Graph) auch immer weiter nach oben, wenn man mit den x-Werten immer weiter nach links, in Richtung von minus unendlich geht.
Die zweite Variante, die auftaucht kann man an folgendem Funktionsgraphen sehen ($f(x) = -x^3$):



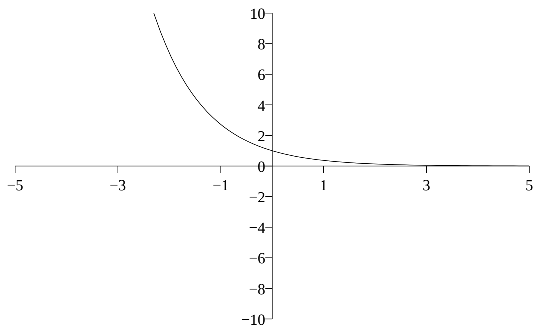
Bei dieser Funktion gehen die Funktionswerte immer weiter nach unten, in Richung minus unendlich, wenn man mit den x-Werten immer weiter nach rechts geht, also:

$$f(x) \longrightarrow -\infty \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

Übrigens gilt auch bei der zweiten Funktion:

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ für } x \longrightarrow -\infty$$

Der dritte Fall, der mitunter in der Schule auftaucht ist bei dem folgendne Funktionsgraphen zu sehen. Die Funktionsgleichung hierzu lautet: $f(x) = e^{-x}$:



Auch hier geht der Funktionsgraph links immer weiter nach oben[11], also

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ für } x \longrightarrow -\infty$$

auf der rechten Seite sieht das allerdings ganz anders aus. Hier werden zwar die Funktionswerte immer kleiner, erreichen aber **nie** die x-Achse und damit den Wert 0. Die Funktionswerte nähern sich immer mehr der x-Achse und damit der Null an:

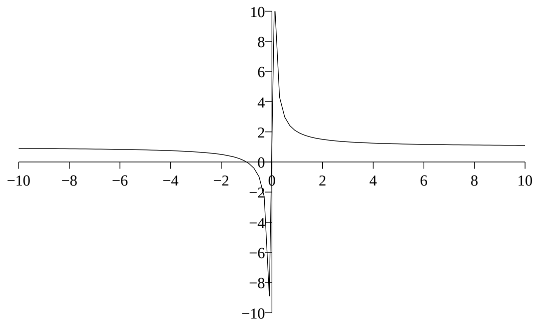
$$f(x) \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

[10] Umgangssprachlich könnte man auch sagen: Je weiter nach rechts, desto weiter nach oben.

[11] Das ist allerdings nicht immer so. Es gibt auch Funktionen, deren Graphen auf der linken Seite in eine andere Richtung gehen!

Wie schon oben gesagt sind mit diesen drei Möglichkeiten, also, die Funktionswerte gehen nach Unendlich, minus Unendlich oder Null, auch schon alle Varianten genannt, die in der Schule vorkommen. Das es auch anders geht soll nur noch der folgende Funktionsgraph verdeutlichen, bei dem

$$f(x) \longrightarrow 1 \text{ für } x \longrightarrow \pm\infty$$



Wirklich nur für diejenigen, die es interessiert: Der Funktionsterm hier ist: $f(x) = \frac{x+1}{x}$, aber derartige Funktionen werden schon lange nicht mehr in der schulischen Mathematik behandelt.

9.6 Transformationen

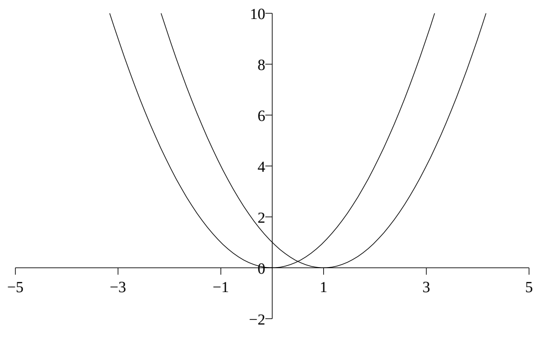
Dieser und die folgenden Abschnitte dieses Kapitels haben nicht direkt mit Eigenschaften von Funktionsgraphen zu tun, die Inhalte treten aber immer wieder im Zusammenhang mit Aufgaben auf und verdienen daher Beachtung.
Bei den sogenannten Transformationen handelt es sich um Veränderungen der Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion. Hierbei werden zwei Transformationen unterschieden: Die Verschiebung und die Streckung beziehungsweise Stauchung eines Funktionsgraphen.

9.6.1 Verschiebung

Hat man eine Funktion mit ihrem Graphen, so lässt sich der Funktionsterm leicht dahingehend ändern, dass der Graph im Koordinatensystem verschoben wird. Eine Verschiebung ist dabei in x- und in y-Richtung möglich.

9.6.1.1 Verschiebungen in x-Richtung

Will man einen Graphen einer Funktion nach rechts oder links verschieben, also in x-Richtung, dann muss die Variable 'x' der Funktion durch einen anderen Term ersetzt werden. Will man etwa den Graphen um eine Einheit nach rechts verschieben, dann muss das 'x' durch '$x-1$' ersetzt werden. Im folgenden Bild sind der Graph der Funktion $f_1(x) = x^2$ und der Graph der Funktion $f_2(x) = (x-1)^2$ zu sehen:



Allgemein gilt:

Für eine Verschiebung um a Einheiten nach **rechts** erreicht man dadurch, dass man 'x' durch '$x-a$' ersetzt. Eine Verschiebung um a Einheiten nach links erreicht man, indem man 'x' durch '$x+a$' ersetzt.

9.6.1.2 Verschiebung in y-Richtung

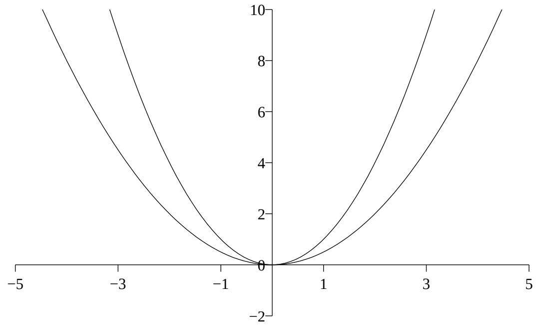
Hier ist die Sache einfacher.

> Eine Verschiebung um a Einheiten nach **oben** wird dadurch erreicht, dass man a zum Funktionsterm hinzu addiert. Eine Verschiebung nach **unten** erreicht man durch die Subtraktion des entsprechenden Wertes.

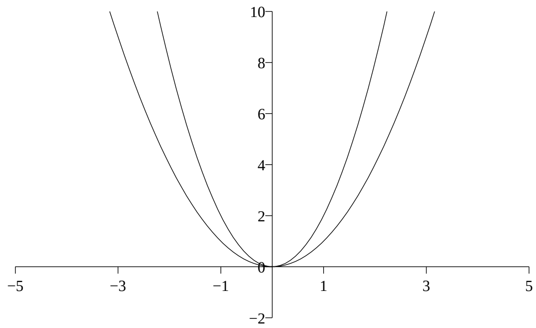
Will man also etwa die Funktion $f(x) = x^2$ um 2 Einheiten nach oben verschieben, dann muss man die Funktionsgleichung nur zu $f(x) = x^2 + 2$ ändern.

9.6.2 Streckung/Stauchung

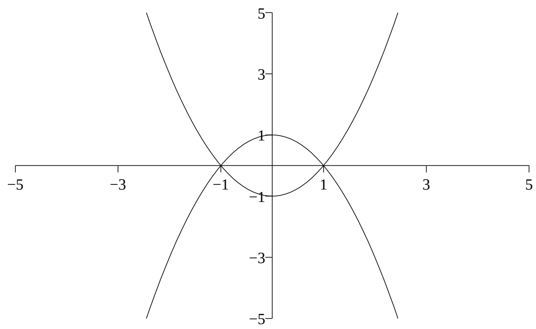
Wird ein Funktionsterm mit einer Zahl multipliziert, dann führt das zu einer Streckung oder Stauchung des Funktionsgraphen. Was ist darunter zu verstehen?
Multipliziert man beispielsweise alle Funktionwerte mit $\frac{1}{2}$, dann bedeutet das, dass der Funktionsgraph überall nur noch halb so hoch ist. Optisch sieht das so aus, als wäre er zusammen gedrück worden. Im folgenden Bild sieht man die beiden Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$:



Die gestauchte Funktion sieht breiter und flacher aus.
Wird der Funktionsterm hingegen mit einer Zahl multipliziert, die größer als 1 ist, dann erhöhen sich die Funktionswerte, der Funktionsgraph sieht aus, als wäre er nach oben hin auseinander gezeogen, er ist gestreckt.



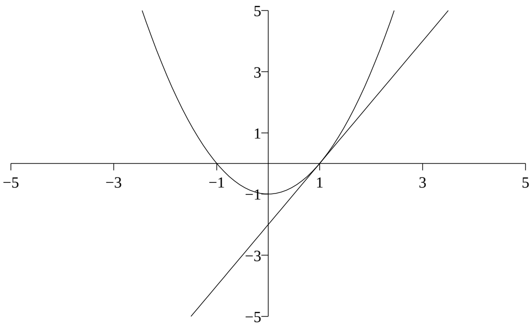
Hier wurden die Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 2 \cdot x^2$ gezeichnet. Der gestreckte Funktionsgraph ist schlanker, nach oben gezogen, also gestreckt.
Eine besondere Situation entsteht, wenn man den Funktionsgraphen mit der Zahl '-1' multipliziert. Dadurch wird der Graph an der x-Achse gespiegelt. Zu sehen ist das anhand der beiden Funktionen: $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = -(x^2 - 1)$.



9.7 Tangente, Sekante, Passante

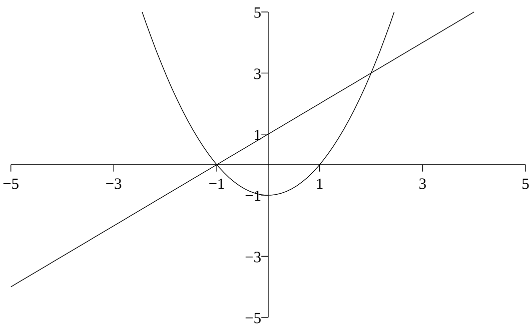
Vier Begriffe, die eigentlich aus der Geometrie stammen, werden auch oft auf Funktionsgraphen angewendet:

1. Eine **Tangente** ist eine Gerade, die einen Funktionsgraphen in nur einem einzigen Punkt berührt.

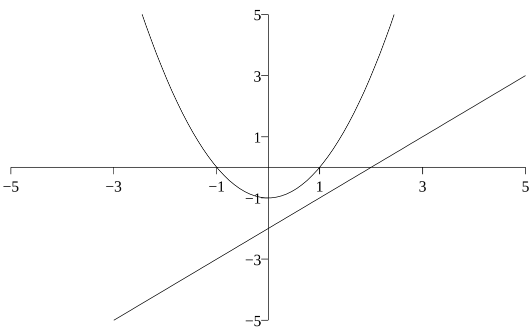
   

   Heißt die Funktione '$f(x)$' und die Gleichung der Geraden: '$g(x)$', dann hat die Gleichung $f(x) = g(x)$ nur eine Lösung.

   Im obigen Beispiel sind es die Funktionen: $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 2x - 2$.
2. Eine **Sekante** ist eine Gerade, die den Funktionsgraph an zwei Stellen schneidet. Analog zu den Bezeichnungen des letzten Punktes hat die Gleichung $f(x) = g(x)$ nun zwei Lösungen.

   Im obigen Beispiel waren es die beiden Funktionen: $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x + 1$.
3. Eine **Passante** ist eine Gerade, die an einem Funktionsgraphen komplett vorbeit geht. Die Gleichung $f(x) = g(x)$ hat keine Lösung.

   Hier waren es die Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x - 2$.

Der letzte Begriff, der hier genannt werden soll, betrifft zwei Geraden. Wenn sich zwei Geraden senkrecht schneiden, dann heißt die eine '*Normale*' der anderen. Dieser Begriff wird darüber auch dann verwendet, wenn eine Gerade (dann die Normale) einen Funktionsgraphen rechtwinklig schneidet.

Auch wenn bis hier der Begriff der Steigung einer Geraden noch nicht erklärt wurde, soll dennoch schon einmal die wichtige Regel zu Normalen benannt werden:

Hat eine Gerade die Steigung m_1 und eine andere Gerade die Steigung m_2, dann stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, wenn gilt:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Aufgaben

A64. Untersuche, ob es sich bei den folgenden Funktionspaaren um eine Funktion und ihre Tangente, Passante oder Sekante handelt. Dazu muss untersucht werden, ob die Gleichung $f(x) = g(x)$ eine, keine oder zwei Lösungen hat.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x - 5$
b) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1. \quad g(x) = x + 1$
c) $f(x) = x^2 - 5x - 2, \quad g(x) = -3x - 3$

9.8 Fachbegriffe

Definitionsmenge

Die Menge aller Zahlen, die in eine Funktion eingesetzt werden kann oder soll.

Wertemenge

Die Menge aller Zahlen, die als Funktionswert einer Funktion vorkommen.

y-Achsen-Abschnitt

Der y-Wert, an dem ein Funktionsgraph die y-Achse schneidet.

Nullstelle

Der x0Wert, an dem eine Funktion die x-Achse schneidet. Im Gegensatz zum y-Achsen-Abschnitt kann es keine, eine oder auch mehrere (sogar unendlich viele!) Nullstellen bei einer Funktion geben.

Achsensymmetrie

Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$. für alle Werte von x.

Punktsymmetrie

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, wenn für alle x-Werte gilt: $f(-x) = -f(x)$.

Stauchung

Ein Funktionsgraph wird gestaucht, wenn man den Funktionsterm mit einer Zahl zwischen Null und Eins multipliziert.

Streckung

Ein Funktionsgraph wird gestreckt, wenn man den Funktionsterm mit einer Zahl multipliziert, die größer als 1 ist.

Verschiebung

Eine Funktion um a Einheiten wird in x-Richtung (rechts-links) verschoben, wenn man x durch $x - a$ ersetzt. Addirt man eine Zahl zum Funktionsterm, dann wird der Graph nach oben verschoben. Wird die Zahl subtrahiert, dann nach unten.

Tangente

Eine Gerade heißt Tangente einer Funktion, wenn sie deren Funktionsgraph in nur einem einzigen Punkt berührt.

Sekante

Eine Gerade heißt Sekante einer Funktion, wenn sie den Funktionsgraphen dieser Funktion an zwei Punkten schneidet.

Passante

Eine Gerade heißt Passante einer Funktion, wenn sie den Funktionsgraphen der Funktion in keinem Punkt berührt oder schneidet.

Normale

Eine Gerade heißt Normale einer anderen Gerade, wenn sie diese rechtwinklig schneidet.

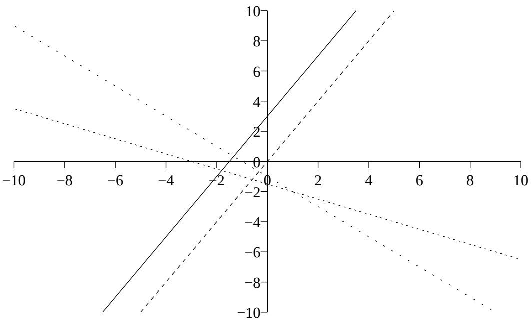
10 Lineare Funktionen

Die erste Gruppe von Funktionen, die nun etwas eingehender besprochen werden soll, besteht aus den **Linearen Funktionen**.

> Alle Funktionen, deren Funktionsgleichung in der Form
>
> $$f(x) = mx + n$$
>
> schreiben lässt, heißen **Lineare Funktionen**. Dabei sind m und n beliebige Zahlen.
> Ihr Graph ist immer eine **Gerade**.
> Man nennt daher lineare Gleichungen auch Geradengleichung.

Als Beispiel sollen hier einige Funktionen mit ihren Graphen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x + 3 \\ f_2(x) &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ f_3(x) &= 2x \\ f_4(x) &= -x - 1 \end{aligned}$$



10.1 Der y-Achsen-Abschnitt

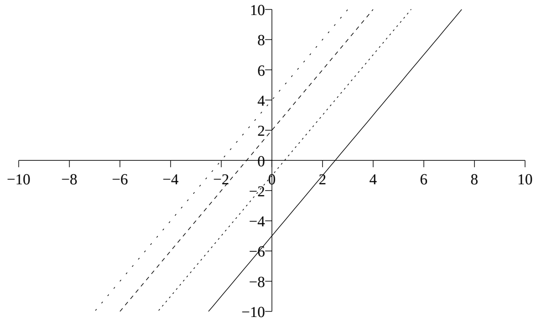
Die linearen Funktionen gehören zu den ganzrationalen Funktionen und daher ist es besonders einfach den y-Achsen-Abschnitt zu ermitteln. Es handelt sich einfach um den Wert, der oben mit 'n' bezeichnet wurde, also die Zahl, die (zumeist am Ende des Funktionsterms) ohne 'x' da steht. Sehr deutlich ist das zu erkennen bei den folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x - 5 \\ f_2(x) &= 2x - 1 \\ f_3(x) &= 2x + 2 \\ f_4(x) &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Hier ist die Zahl bei dem 'x' immer 2, während sich die Zahl am Ende der Funktionsgleichung alleine ändert[1]

Betrachtet man nun die dazu gehörigenFunktionsgraphen, dann wird der Zusammenhang noch einmal sofort deutlich:

[1] Zu der 2 vor dem x kommen wir gleich.



Deutlich erkennt man, dass die Aussage, die bislang eher theoretischer Natur war, sich auch in den Graphen wieder findet. Einen Punkt des zu einer linearen Funktion gehörigen Graphen, kann man in der Regel von der Funktionsgleichung ablesen, der Punkt $((0/n))$, an dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Aufgaben

A65. Gib jeweils den y-Achsen-Abschnitt der folgenden Funktionen an:

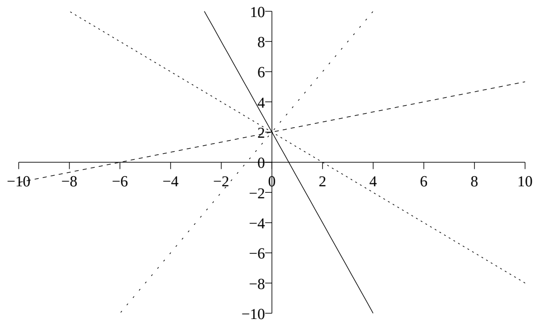
a)	$f(x) = 2x + 3$	b)	$f(x) = -3x - 7$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}$	d)	$f(x) = 0.,12x - 3,14$

10.2 Die Steigung

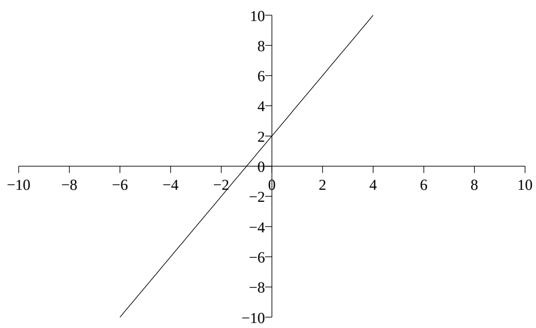
Der Wert von 'n' gibt also den y-Achsen-Abschnitt am. Welchen Einfluss hat 'm'?
Auch hierzu sollen einfach mal ein paar lineare Funktionen mit ihren Funktionsgraphen genauer angesehen werden. Im Gegensatz zum obigen Beispiel wird nun nicht der Wert von 'n' geändert, sondern der von 'm': .

$$f_1(x) = -3x + 2$$
$$f_2(x) = -1x + 2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{3}x + 2$$
$$f_4(x) = 2x + 2$$

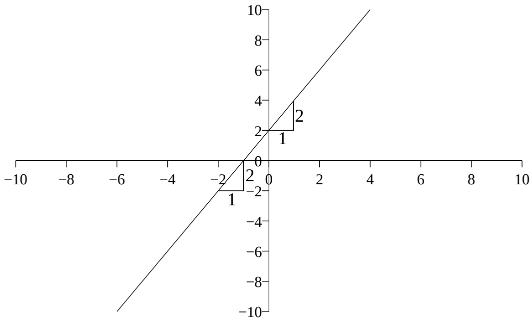
Die zu den Funktionen gehörigen Graphen sehen folgndermaßen aus:



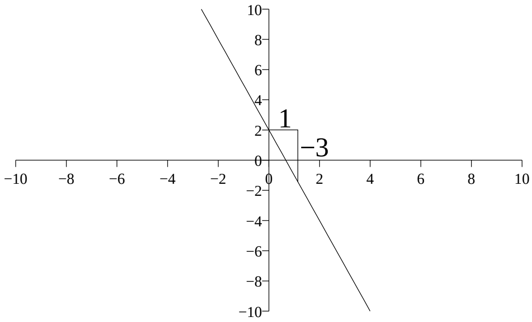
Wie nicht anders zu erwarten, gehen alle Graphen durch den Punkt (0/2), was sich hingegen geändert hat ist der Winkel zwischen der jeweiligen Geraden und der x-Achse. Offenbar wird dieser durch den Wert von 'm' beeinflusst.
Es hat sich eingebürgert Funktionsgraphen 'von links nach rechts' zu lesen. Manche dieser Graphen steigen an, manche fallen ab.
Will man nun genauer wissen, **wie** sich 'm' auswirkt, ist es sicherlich sinnvoll, sich auf eine Funktion zu beschränken. Im weiteren soll das die Funktion: $f(x) = 2x+2$ sein, deren Graph folgendermaßen aussieht:



So einfach ist hier nicht erkennbar, wo sich die '2' vor dem x versteckt. Das wird allerdings leichter sichtbar, wenn man die Zeichnung ein kleines bisschen ergnzt:



Erkennbar ist, dass der Graph der Funktion um zwei Dreiecke ergänzt wurde. Man nennt diese Dreiecke auch '*Steigungsdreiecke*'. Auch wenn das aufgrund der Verzerrung des Graphen[2] nicht so unmittelbar erkennbar ist, kann man sehen, dass man immer dann, wenn man von irgendeinem Punkt der Geraden um eine Einheit waagerecht nach rechts geht, genau um die 2 nach oben gehen muss, um wieder auf dem Graphen zu landen[3].
Bei den Funktionen, bei denen eine negative Zahl vor dem x steht, funktioniert das genau so, allerdings muss man dann, wenn man um eine Einheit waagerecht nach rechts gegangen ist, eben um die angegebene Anzahl von Einheiten nach unten gehen:



Die Funktion, die hier dargestellt ist, hat die Funktionsgleichung: $f(x) = -3x + 2$.

Aufgaben

A66. Gib begründet an, welche Art von Geraden **nicht** in der Form: $f(x) = mx + n$ dargestellt werden können.

10.2.1 Folgerungen aus Steigung und y-Achsen-Abschnitt

Man mache sich klar, dass man mit dem Wissen um den y-Achsen-Abschnitt und die Steigung einer linearen Funktion auch ohne eine Wertetabelle zu füllen sofort den Funktionsgraphen der Funktion zeichnen kann.
Der erste Punkt, der auf dem Funktionsgraphen liegt, ergibt sich unmittelbar aus dem y-Achsen-Abschnitt. Geht man von diesem Punkt um eine Einheit nach rechts, dann muss man nur um die Steigung nach oben/unten, um wieder bei einem Punkt zu landen, der ebenfalls auf dem Graphen liegen muss.
Da man nun weiß, dass die Graphen aller linearen Funktionen Geraden sind, reichen diese beiden Punkte, um den vollständigen Funktionsgraphen zu zeichnen. Man muss nun nur noch ein Lineal an die beiden Punkte anlegen und den Funktionsgraphen ergänzen.

10.2.2 Gebrochene Steigungen

Mitunter erscheint es etwas schwierig eine Steigung einzuzeichnen, vor allem dann, wenn es sich um einen Bruch handelt.
Betraachten wird die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

[2] Die Abstände auf der x-Achse sind andere als auf der y-Achse

[3] In einem anderen Zusammenhang wird noch deutlich, dass es sehr wichtig ist, dass man diese Dreiecke von jedem Punkt des Graphen aus zeichnen kann.

Den y-Achsen-Abschnitt in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, dürfte keine Schwierigkeit darstellen, wohl aber die Steigung. Man wird es sicherlich schaffen um eine Einheit nach rechts zu gehen, aber wie soll man um $\frac{2}{3}$ Einheiten nach oben?
Es gibt allerdings in der Mathematik einen Satz, der einem das Leben erleichtern kann. Ohne ihn hier weiter zu erklären, kann man aus diesem Satz entnehmen, dass man auch um den Nenner der Steigung nach rechts gehen kann und dann um den Zähler nach oben oder unten.
Im obigen Beispiel würde man um 3 Einheiten nach rechts gehen und um 2 Einheiten nach oben, um wieder auf einem Punkt des Graphen zu landen.
Das gilt übrigens auch für ganzzahlige Steigungen. Man muss nur daran denken, dass etwa '3' als Bruch geschrieben: '$\frac{3}{1}$' aussieht. Nun stimmt es wieder. Man geht um eine Einheit (Nenner) nach rechts und um 3 Einheiten (Zähler) nach oben,

10.2.3 Der Steigungswinkel

Anstatt die Steigung einer Geraden als Zahl ('m') anzugeben, kann die Steigung auch als Winkel angegeben werden. Damit ist der Winkel zwischen der Geraden und der Horizontalen gemeint. Dieser ist einfach der Arcustangensi[4] der Steigung m.
So hat die Gerade, die zu der Funktionsgleichung: $f(x) = 2x + 3$ gehört, den Steigungswinkel:

$$\alpha = \arctan(2) \approx 63,4^\circ$$

10.3 Nullstelle

Um die Nullstelle einer linearen Funktion bestimmen zu können, muss $f(x) = 0$ gesetzt werden, so wie bei allen anderen Funktionen auch. Im Falle der linearen Funktionen führt das in der Regel zu einer besonders einfachen Gleichung. So ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x + 3$ folgendermaßen zu berechnen:

$$\begin{aligned} 9 &= 2x + 3 \\ -3 &= 2x \\ -\frac{3}{2} &= -1,5 = x \end{aligned}$$

Aufgaben

A67. Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = 3x - 12$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$
c)	$f(x) = 1,2x - 3,2$	d)	$f(x) = \frac{1}{5}x - 0,2$

10.4 Sich schneidende Geraden

Um den Schnittpunkt zweier Geraden zu ermitteln, müssen die beiden FUnktionsgleichungen der zugehörigen Funktionen nur gleich gesetzt werden. Damit kann dann der x-Wert des Schnittpunktes ermittelt werden. Setzt man diesen in eine der beiden Funktionsgleichungen ein, erhält man auch den y-Wert.
Als Beispiel soll der Schnittpunkt der beiden Geraden $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = 3x - 5$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 3x - 5 \\ -3 &= x - 5 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Man kann den Wert von $x = 2$ nun in jede der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, wobei im Normalfall eine reicht[5]. Dass es hier mit beiden Gleichungen gemacht wird, dient nur der

[4] So wird die Umkehrfunktion des Tangens genannt. Auf Taschenrechnern findet man sie auch oft unter der Bezeichung: $\tan^{-1}$.

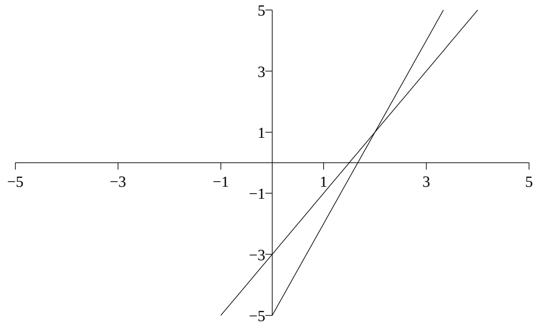
[5] Man sollte sich dabei die Funktionsgleichung nehmen, die leichter auszurechnen ist. Dies gilt vor allem dann, wenn man nicht zwei lineare Funktionen hat, sondern die Schnittpunkte von komplizierteren Funktionen berechnen will. Auch bei denen ist das Verfahren prinzipiell gleich.

Demonstration, dass tatsächlich in beiden Fällen das Gleiche heraus kommt:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2 - 3 \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 3 \cdot 2 - 5 \\ &= 6 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist also der Punkt (2/1), wie auch das Bild der beiden Geraden zeigt:



10.4.1 Senkrechte Geraden

Nachdem nun der Begriff der Steigung einer Geraden bekannt ist, kann auch deutlicher gemacht werden, was unter einer Normalen verstanden werden soll.
Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn für die zugehörigen Steigungen gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Will man etwa wissen, welche Steigung eine Gerade hat, welche die Gerade von $f(x) = 2x + 3$ senkrecht schneidet, dann kann man sie mit dem obigen Wissen ausrechnen. Nennt man die gesuchte Steigung m, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot m &= -1 \\ m &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgaben

A68. Gib die Steigung der zu den gegebenen Funktionen senkrechten Geraden an

a)	$f(x) = 3x - 7$	b)	$f(x) = -2x + 3$
c)	$f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{7}$	d)	$f(x) = 0,2x - 0,7$

A69. Entscheide, ob die folgenden Geraden senkrecht aufeinander stehen.

a)	$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$	b)	$f(x) = -\frac{1}{3}x - 7, \quad g(x) = -3x + 2$
c)	$f(x) = 0,3x - 7, \quad g(x) = -\frac{10}{3}x + 5$	d)	$f(x) = 5x + 1, \quad g(x) = -0,3x + 7,1$

10.5 Ermittlung von Funktionsgleichungen

In diesem Abschnitt soll nun der umgekehrte Weg beschritten werden. Gewisse Informationen über eine Gerade sind bekannt und es soll die dazu gehörige Funktionsgleichung ermittelt werden.

10.5.1 Ein Punkt und die Steigung bekannt

Kennt man von einer Geraden einen Punkt und ihre Steigung, lässt sich die zugehörige Gleichung sehr einfach ermitteln.
Die generelle Form einer linearen Gleichung ist ja

$$f(x) = mx + n$$

wobei 'm' die Steigung ist. Ein Teil der Funktionsgleichung ist also schon bekannt (man kennt das 'm') und nur noch der Rest muss ermittelt werden. Dazu kann man den bekannten Punkt in die (vorläufige) Geradengleichung einsetzen und damit dann auch 'n' berechnen.

Ein Beispiel: Angenommen, man wüsste, dass eine Gerade die Steigung 3 hat und durch den Punkt (1/7) geht.
Die Steigung kann man sofort in die allgemeine Geradengleichung einsetzen, so dass man schon weiß, dass die gesuchte Funktionsgleichung die Form

$$f(x) = 3x + n$$

haben muss. In diese Gleichung kann man nun den y-Wert des Punktes an Stelle von $f(x)$ einsetzen und den x-Wert an Stelle des x:

$$\begin{aligned} 7 &= 3 \cdot 1 + n \\ 7 &= 3 + n \\ 4 &= n \end{aligned}$$

Nun kennt man auch den Wert für 'n' und weiß daher:

$$f(x) = 3x + 4$$

Aufgaben

A70. Bestimme die Gleichung der Geraden, welche die angegebene Steigung hat und durch den angegebenen Punkt geht.

a)	$m = 3,$	$(3/7)$	b)	$m = -4,$	$(10/-47)$
c)	$m = \frac{1}{2},$	$(8/9)$	d)	$m = -3,$	$(2/15)$

10.5.2 Zwei bekannte Punkte

Wenn zwei Punkte bekannt sind, dann gibt es zwei Möglichkeiten die Geradengleichung der Geraden zu ermitteln, die durch diese beiden Punkte geht:

1. Man kann die Geradengleichung mit einem LGS direkt ermitteln.
2. Mit Hilfe der sogenannten Steigungsformel kann die Steigung der Geraden berechnet werden, die durch diese beiden Punkte geht. Danach kann wie im letzten Abschnitt mit der Steigung und einem der beiden Punkte die Gleichung ermittelt werden.

10.5.2.1 Der direkte Weg

Schon oben wurde ein Punkt in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt, um 'n' zu ermitteln. Man kann alternativ auch beide Punkte in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und erhält so ein Lineareas Gleichungssystem mit dem die Geradengleichung berechnet werden kann.
Angenommen eine Gerade geht durch die Punkte $A(-2/-1)$ und $B(1/5)$. Setzt man den Punkt A in die allgemeine Geradengleichung $f(x) = mx + n$ ein, erhält man:

$$-1 = m \cdot (-2) + n$$

Mit Hilfe von b erhält man:

$$5 = m \cdot 1 + n$$

Löst man die erste Gleichung nach 'n' auf, erhält man:

$$n = 2m - 1$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} 5 &= m + 2m - 1 \\ 6 &= 3m \\ 2 &= m \end{aligned}$$

Nun kann man 'm' in die umgeformte erste Gleichung einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} n &= 2 \cdot 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Da nun 'm' und 'n' bekannt sind, ist auch die Geradengleichung bekannt:

$$f(x) = 2x + 3$$

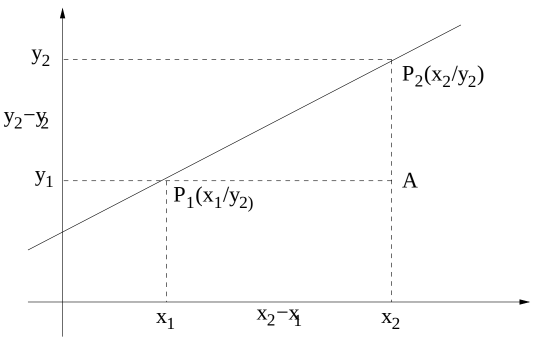
Aufgaben

A71. Bestimme nach der direkten Methode die Gleichungen der linearen Funktionen, die durch die angegebenen Punkte geht.

a)	$A(1/-4), B(3/2)$	b)	$A(-3/5), B(-10/40)$
c)	$A(4/\frac{7}{2}), B(8/\frac{11}{2})$	d)	$A(-2/-5,8), B(3/0,2)$

10.5.2.2 Der Umweg über die Steigung

Statt die Gleichung der linearen Funktion sofort mit einem LGS zu berechnen, kann man auch erst nur die Steigung der Geraden berechnen. Betrachtet man die Situation allgemein, dann könnte die Sache folgendermaßen aussehen:



Die gegebenen Punkte sind hier mit $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ bezeichnet. Zusammen mit dem Punkt A ergeben sie etwas ähnliches, wie ein Steigungsdreieck. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Strecke P_1A in der Regel nicht genau eine Einheit lang sein wird, sie hat die Länge $x_2 - x_1$. Und auch die senkrechte Linie von A nach P_2 hat nicht die Länge der Steigung, sondern die Länge: $y_2 - y_1$.
Mit Hilfe des sogenannten 2. Strahlensatzes lässt sich aber berechnen, wie lang die senkrechte Linie wäre, wenn die waagerechte eine Einheit lang wäre[6]. Dazu muss nur die senkrechte Länge ($AP_2 = y_2 - y_1$) durch die waagerechte ($P_1A = x_2 - x_1$) dividiert werden. Diesen Bruch nennt man auch **Steigungsformel** oder **Differenzenquotient**.

> Die Steigung einer Geraden durch die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ kann mit der Steigungsformel berechnet werden zu:
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ein Beispiel: Angenommen eine Gerade geht durch die Punkte: $A(10/23)$ und $B(-2/-1)$. Nun könnte man einfach die Steigungsformel verwenden, um die Steigung der zugehörigen Geraden zu ermitteln. Die einzige Schwierigkeit besteht darin zu entscheiden, welcher der beiden Punkte denn der erste und welcher der zweite ist. Diese Schwierigkeit ist aber nur eine scheinbare, denn in beiden Fällen kommt man zu dem gleichen Ergebnis:

Mit **A** als erstem Punkt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1-23}{-2-10} \\ &= \frac{-24}{-12} \\ &= 2 \end{aligned}$$

6 Eigentlich ist die Sache ganz einfach: Wenn die waagerechte Linie 2 Einheiten lang ist, dann ist die senkrechte auch doppelt so lang, wie die Steigung. Ist sie dreimal so lang, dann ist auch die senkrechte dreimal so lang wie die Steigung. Aus dieser Überlegung folgt nun das, was im folgenden Steigungsformel genannt wird.

Mit **B** als erstem Punkt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{23-(-1)}{10-(-2)} \\ &= \frac{23+1}{10+2} \\ &= \frac{24}{12} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Mit dieser Steigung und einem der beiden Punkte A oder B kann nun nach dem obigen Verfahren die Funktionsgleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 10 + n \\ 23 &= 20 + n \\ 3 &= n \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = 2x + 3$.

Aufgaben

A72. Berechne die Steigung der Geraden durch die angegebenen Punkte:

a)	$A(1/-4), B(2/-1)$	b)	$A(-1/14), B(3/-2)$	c)	$A(2/80), B(5/50)$
d)	$A(4/7), B(10/10)$	e)	$A(3/6), B(9/4)$	f)	$A(3/0,2), B(-3/-7)$

10.6 Fachbegriffe

Steigung

Die Steigung einer Gerade gibt an, um wieviele Einheiten man von irgendeinem Punkt einer Geraden nach oben (positive Steigung) oder unten (negative Steigung) gehen muss, um wieder zur Geraden zu gelangen.
Diese Zahl ist gleich der Zahl 'm' in der allgemeinen Form der Geradengleichung.

Steigungsformel

Geht eine Gerade durch die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$, dann kann ihre Steigung mit der Steigungsformel

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

berechnet werden. Der Term rechts des Gleichheitszeichens heißt auch **Differenzenquotient**.

Steigungswinkel

Der Steigungswinkel ist der Winkel zwischen einer Geraden und der Horizontalen. Er ist gleich dem Arcustangens der Steigung.

y-Achsen-Abschnitt

Der y-Wert, an dem ein Graph die y-Achse schneidet.

11 Quadratische Funktionen

Alle Funktionen, deren Funktionsgleichung sich als

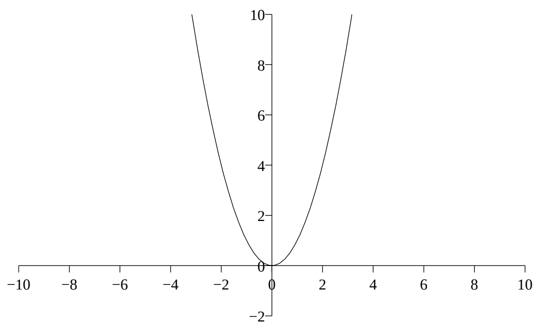
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

schreiben lässt heißen: **Quadratische Funktion**.
Ihr Graph ist immer eine **Parabel**.

Die einfachste quadratische Funktion ist die Funktion

$$f(x) = x^2$$

ihr Graph hat das folgende Aussehen:



Bei dem Graphen handelt es sich um eine Parabel. In diesem Fall sogar um eine besondere Parabel, die Normalparabel.

11.1 y-Achsen-Abschnitt

Wie bei allen ganzrationalen Funktionen, zu denen auch die quadratischen Funktionen gehören, ist die Zahl, die ohne 'x' zumeist am Ende der Funktionsgleichung geschrieben wird, der zugehörige y-Achsen-Abschnitt, bei dem der Graph die y-Achse schneidet.
Die Parabel zu

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

etwa, schneidet die y-Achse beim y-Wert 2, oder, was das gleiche bedeutet, sie durchläuft den Punkt (0/2).

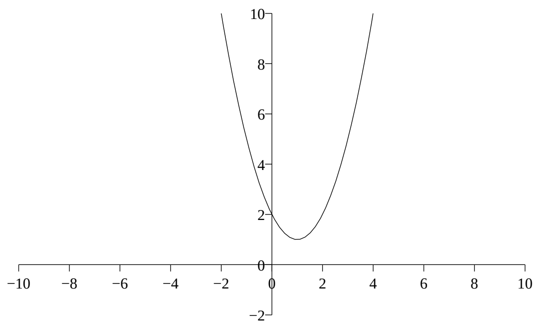
Aufgaben

A73. Bestimme den y-Achsen-Abschnitt der folgenden Funktionen.

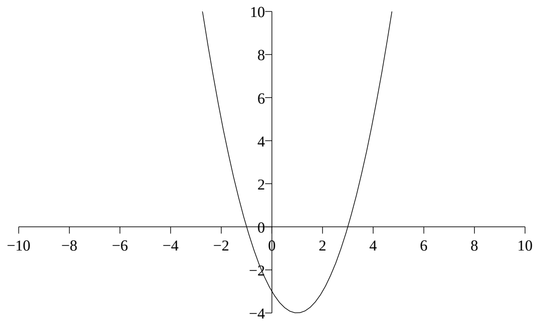
a)	$f(x) = 2x^2 - 6x + 7$	b)	$f(x) = x^2 - 3x - 13$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$	d)	$f(x) = 0,2x^2 - 1,3x + 2,7$
e)	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5 - x^2 + 3$	f)	$f(x) = (x-1)(x-3) + 2$

11.2 Nullstellen

Setzt man $f(x)$ bei einer quadratischen Funktion gleich Null, dann ergibt sich eine quadratische Gleichung, die wie oben beschrieben, gelöst werden kann. Dort wurde darauf hingewiesen, dass quadratische Gleichungen eine, keine oder zwei Lösungen haben können. Das korrekiert nun mit dem Umstand, dass Parabeln die x-Achse nur einmal berühren, wie es bei der letztgezeigten der Fall war, sie können aber auch komplett oberhalb (oder unterhalb) der x-Achse verlaufen,



so dass sie keine Berührung oder Schnittstelle mit der x-Achse haben und daher auch keine Nullstellen. Oder sie schneiden die x-Achse zweimal, haben zwei Nullstellen und die zugehörige quadratische Gleichung hat zwei Lösungen.



Aufgaben

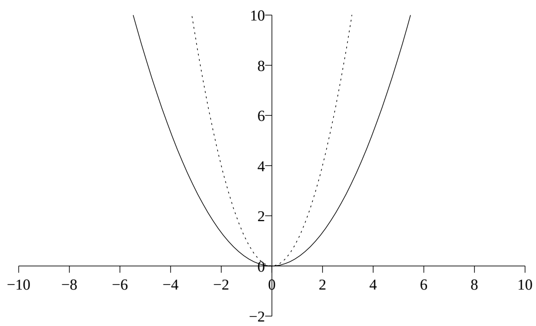
A74. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a)	$f(x) = x^2 - 8x + 15$	b)	$f(x) = 2x^2 - 12x - 14$
c)	$f(x) = 15x^2 - 8x + 1$	d)	$f(x) = x^2 - 0,6x + 0,05$
e)	$f(x) = 3x^2 + 12x + 15$	f)	$f(x) = x^2 - 142x + 5041$

11.3 Öffnung und Form der Parabel

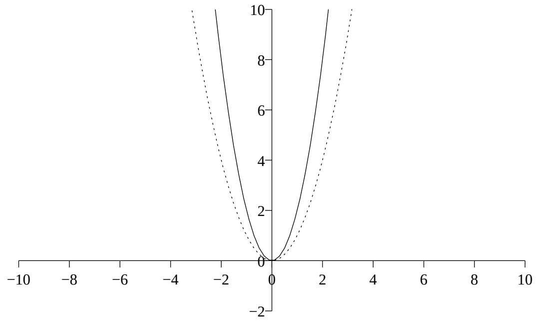
Bei den bisherigen Parabeln handelte es sich ausnahmslos um sogenannte Normalparabeln. Aus dem Abschnittt über Transformationen ist bekannt, dass man Funktionsgraphen und damit auch Parabeln stauchen und strecken kann.

Wird 'x^2' mit einem Faktor zwischen Null und Eins multipliziert, dann entsteht eine '*gestauchte Parabel*'. Im folgenden werden $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ in einem Kooridnatensystem dargestellt. Die Normalparabel ist dabei gestrichelt.

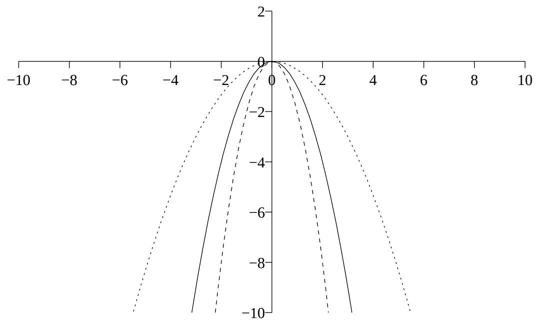


Deutlich is die Stauchung der Parabel gegenüber der gestrichelten Normalparabel erkennbar.

Analog wird eine Parabel gestreckt, wenn man 'x^2' mit einer Zahl multipliziert, die größer ist als Eins. Im folgenden werden $f(x) = x^2$ (gestrichelt) und $g(x) = 2x^2$ dargestellt.



Auch hier ist die Streckung deutlich erkennbar.
Ebenfalls im Abschnitt über Transformationen wurde darauf hingewiesen, dass die Multiplikation einer Funktionsgleichung mit '-1' zu einer Spiegelung an der x-Achse führt. Das gilt für Parabeln genau so. Insgesamt ist es sogar so, dass **jeder** negative Faktor von 'x^2' dazu führt, dass die Parabel gespiegelt wird und damit nach unten geöffnet.



Die Funktionen $f(x) = -x^2, \quad g(x) = -\frac{1}{3}x^2, \quad h(x) = -2x^2$

Insgesamt gilt für den Faktor a von 'x^2':

$a < -1$	Nach unten geöffnet, gestreckt
$a = -1$	Nach unten geöffnet, Normalparabel
$-1 < a < 0$	Nach unten geöffnet, gestaucht
$0 < a < 1$	Nach oben geöffnet, gestaucht
$a = 1$	Nach oben geöffnet, Normalparabel
$a > 1$	Nach oben geöffnet, gestreckt

11.4 Scheitelpunkt

Der tiefste Punkt einer nach oben geöffneten, beziehungsweise der höchste Punkt einer nach unten geöffneten Parabel heißt: **Scheitelpunkt** der Parabel.

11.4.1 Mit Verschiebung

Will man den Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen, dann kann man die Parabel erst einmal soweit nach oben bzw. unten verschieben, bis die zugehörige Funktionsgleichung die Form:

$$f(x) = ax^2 + bx$$

hat. Tatsächlich braucht man sich dabei eigentlich noch nicht einmal zu merken, dass man die Parabel dadurch verschiebt, man lässt einfach die Zahl ohne 'x' weg, was eben genau der geforderten Verschiebung entspricht. Bei dieser Verschiebung ändert sich die x-Koordinate des Scheitelpunktes nicht, weil ja nur nach oben oder unten verschoben wird.
Von dieser (reduzierten) Funktion bestimmt man die beiden Nullstellen, was in diesem Fall besonders einfach geht.
Die x-Koordinate des Scheitelpunktes muss sichgenau zwischen diesen beiden Nullstellen befinden.
Setzt man diese wieder in die ursprüngliche Funktionsgleichung ein, erhält man auch die y-Koordinate.

Wo befindet sichzum Beispiel der Scheitelpunkt der Funktion zu

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 7$$

Das berechnet man zunächst die Nullstellen der Funktion: $f(x) = 2x^2 - 8x$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 8x \\ 0 &= x(2x - 8) \\ x = 0 \vee &\quad 2x - 8 = 0 \\ x = 0 \vee &\quad 2x = 8 \\ x = 0 \vee &\quad x = 4 \end{aligned}$$

Die x-Kooridnate muss zwischen $x = 0$ und $x = 4$ liegen, also bei $x = 2$. Diesen Wert setzt man nun nur noch in die ursprüngliche Funktionsgleichung ein: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = -1$.
Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind also: $SP(2/-1)$.

Aufgaben

A75. Bestimme die Scheitelpunkte der folgenden quadratischen Funktionen.

a)	$f(x) = x^2 - 6x + 2$	b)	$f(x) = 3x^2 - 12x + 20$
c)	$f(x) = 5x^2 + 3x - 7$	d)	$f(x) = x^2 - 4x$

11.4.2 Mit der Scheitelpunktform

Jede Gleichung einer quadratischen Funktion lässt sich in die Form

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

bringen, die sogenannte **Scheitelpunktform**.
Der Wert von a entspricht dabei genau dem der allgemeinen Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

und die Werte von 'x_s' und 'y_s' sind genau die Koordinaten des Scheitelpunktes.

Wenn eine quadratische Funktionsgleichung in der allgemeinen Form gegeben ist, dann muss sie in die Scheitelpunktform umgeformt werden, um die Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen zu können.
Das Verfahren soll *kurz* anhand des obigen Beispiels erklärt werden. Zunächst klammert man den Wert von 'a' aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 7 \\ &= 2(x^2 - 4x + \frac{7}{2}) \end{aligned}$$

Nun führt man innerhalb der Klammer eine quadratische Ergänzung durch.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x + \frac{7}{2}) \\ &= 2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + \frac{7}{2}) \\ &= 2[(x-2)^2 - 4 + \frac{7}{2}] \end{aligned}$$

Nun werden die Zahlen außerhalb des Binoms zusammen gefasst und abschließend die äußere Klammer[1] wieder ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[(x-2)^2 - 4 + \frac{7}{2}] \\ &= 2[(x-2)^2 - \frac{1}{2}] \\ &= 2(x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

[1] Hier die eckige Klammer.

Nun ist die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform umgewandelt und man kann die Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen. Hierbei muss man nur noch bedenken, dass die x-Koordinante in der Scheitelpunktform mit 'falschem' Vorzeichen steht. Auch nach diesem Verfahren sind also die Koordinaten des Scheitelpunktes: $SP(2/-1)$.

11.5 Bestimmen einer quadratischen Funktionsgleichung

11.5.1 Ohne Scheitelpunkt

Zur Festlegung einer Geraden braucht man zwei Punkte und so reichen auch zwei Punkte, um mit ihnen die Funktionsgleichugn der entsprechenden quadratischen Funktion zu ermitteln.
Bei Parabeln reichen drei Punkte aus und es gelingt auch mit ihnen die zugehörige Funktionsgleichung zu ermitteln. Das Verfahren ist recht einfach. Man setzt einfach die drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ein und erhält auf diesem Wege ein lineares Gleichungssystem, das dann nur noch gelöst zu werden braucht.
Als Beispiel soll die Gleichung der quadratischen Funktion ermittelt werden, deren Parabel die durch die Punkte $A(1/6)$, $B(-1/2)$ und $C(3/18)$ geht.
Setzt man den Punkt A in $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} 6 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 6 &= a + b + c \end{aligned}$$

Setzt man B in diese allgemeine Form ein, erhält man:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 2&a - b + c \end{aligned}$$

Und mit C erhält man:

$$\begin{aligned} 18 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 18 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

Löst man die zweite Gleichung nach 'b' auf, ergibt sich:

$$b = a + c - 2$$

Setzt man dies in die anderen Gleichungen ein, erhält man:

$$\begin{aligned} 6 &= a + \quad a + c - 2 \quad + c \\ 6 &= 2a + 2c - 2 \\ 8 &= 2a + 2c \\ 4 &= a + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 &= 9a + 3(a + c - 2) + c \\ 18 &= 9a + 3a + 3c - 6 + c \\ 18 &= 12a + 4c - 6 \\ 24 &= 12a + 4c \\ 6 &= 3a + c \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich nun

$$a = 4 - c$$

und setzt man das in die dritte Gleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6 &= 3(4 - c) + c \\ 6 &= 12 - 3c + c \\ 6 &= 12 - 2c \\ -6 &= -2c \\ 3 &= c \end{aligned}$$

Nachdem nun das erste zahlenmäßige Ergebnis bekannt ist, kann dieses in die erste Gleichung eingesetzt werden:

$$a = 4 - 3$$
$$a = 1$$

Nun können a und c noch in die zweite Gleichung eingesetzt werden:

$$b = 1 + 3 - 2$$
$$b = 2$$

Nun sind alle Faktoren bekannt, die gesuchte Funktionsgleichung ist:

$$f(x) = [1]x^2 + 2x + 3$$

Aufgaben

A76. Bestimme jeweils die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, deren Parabel durch die drei angegebenen Punkte geht.

a)	$A(1/-2), B(0/2), C(2/-4)$	b)	$A(1/-2), B(2/-6), C(-1/6)$
c)	$A(1/7), B(2/21), C(-1/-3)$	d)	$A(1/0,6), B(0,5/0,425), C(2/1,1)$

11.5.2 Mit Scheitelpunkt

Weiß man vorab, dass einer der bekannten Punkte der Scheitelpunkt der Parabel ist, dann genügt ein weiterer Punkt, um die zugehörige Gleichung der quadratischen Funktion zu ermitteln. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten:

Zunächst mal kann man aufgrund der Informationen leicht einen dritten Punkt bestimmen, der ebenfalls auf der Parabel liegen muss. Wenn etwa der Punkt $S(5/1)$ der Scheitelpunkt der Parabel ist und ein weiterer Punkt $A(3/5)$ auf der Parabel liegt, dann kann man sich aus Symmetriegründen einen weiteren Punkt leicht überlegen.

Der Punkt A liegt zwei Einheiten links neben dem Scheitelpunkt, daher muss ein weiterer zwei Einheiten rechts davon liegen, also die x-Koordinate 7 haben. Seine y-Koordinate muss aber auch den gleichen y-Wert haben, wie der Punkt A und damit ist: $B(7/5)$.

Mit den nun bekannten drei Punkten $A(3/5)$, $S(5/1)$ und $B(7/5)$ kann nun genau so verfahren werden, wie oben beschrieben.

Es gibt aber auch noch einen einfacheren Weg. Man setzt den Scheitelpunkt und den Punkt A nicht in die allgemeine Form, sondern in die Scheitelounktform ein.

S eingesetzt ergibt:

$$f(x) = a(x - 5)^2 + 1$$

Setzt man nun auch noch A ein, erhält man:

$$5 = a(3 - 5)^2 + 1$$
$$5 = 4a + 1$$
$$4 = 4a$$
$$1 = a$$

Die Scheitelpunktform hat daher das Aussehen:

$$f(x) = [1\cdot](x - 5)^2 + 1$$

Will man lieber die allgemeine Form haben, muss nur die Klammer ausmultipliziert und dann der Term zusammen gefasst werden:

$$f(x) = x^2 - 10 + 26$$

11.6 Schnittpunkt von Funktionsgraphen

Es wurde ja schon darauf hingewiesen, dass eine Gerade Passante, Sekante oder auch Tangente einer Parabel sein kann. Man kann aber auch generell fragem an welchen Punkten sich zwei Funktionsgraphen schneiden.
Generell werden dazu die beiden Funktionsgleichungen gleich gesetzt und so der oder die x-Werte bestimmt, an denen die beiden Funktionsgraphen gleich sind, sich also schneiden oder berühren. Hat man diesen x-Wert, dann kann man ihn in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um so auch noch den zugehörigen y-Wert zu bestimmen.
Als Beispiel sollen die Schnittpunkte der beiden Funktionen

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 8 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - 2x + 3$$

bestimmt werden.
Im ersten Schritt werden die beiden Funktionsterme gleich gesetzt und damit den/die x-Werte bestimmt:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 8x + 8 &= x^2 - 2x + 3 \\
x^2 - 8x + 8 &= -2x + 3 \\
x^2 - 6x + 8 &= 3 \\
x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
x = 1 \quad &\vee \quad x = 5
\end{aligned}$$

Nun müssen diese beiden Werte (Die beiden Funktionen haben zwei Schnittpunkte!) in eine der beiden Gleichungen eingesetzt werden, um auch die zugehörigen y-Werte zu bestimmen. Da $g(x)$ etwas einfacher ist, wird diese Funktion genommen:

$$\begin{aligned}
g(1) &= 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 \\
&= 1 - 2 + 3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(5) &= 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 \\
&= 25 - 10 + 3 \\
&= 18
\end{aligned}$$

Die beiden Schnittpunkte sind also: (1/2) und (5/18).

Aufgaben

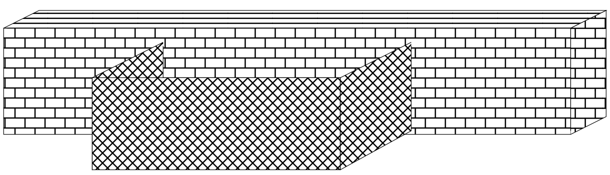
A77. Bestimme die Schnittpunkte der folgenden Funktionspaare

a)	$f(x) = 2x^2 + 2x - 9$	$g(x) = x^2 + 3x - 7$
b)	$f(x) = 4x^2 - 20x + 52$	$g(x) = 3x^2 - 5x + 2$
c)	$f(x) = 2x^2 - 3x + 4,$	$g(x) = x^2 + 3x - 5$
d)	$f(x) = 2x^2 - x + 3,$	$g(x) = x^2 - 3x - 2$

11.7 'Böse' Aufgaben

Gerade im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen lassen sich einige **sehr** interessante Aufgaben stellen. Hier mal ein paar Beispiele, die Lösungen finden sich wie immer im hinteren Teil. Nicht alle Aufgaben führen dabei unbedingt auf eine quadratische **Funktion**, aber zumindest auf eine quadratische Gleichung!

A78. Mit einer Rolle Zaundraht, auf dem 10m Drahtgeflecht aufgerollt sind, soll an einer Mauer ein möglichst großes, rechteckiges Stück Boden abgegrenzt werden.



Berechne wie breit und wie tief die Rechteckfläche wird und wie groß sie ist.

A79. Ein Fußballspiel sahen 2400 Besucher. Eine Karte für einen Jugendlichen kostet dabei 2€ weniger als die für einen Erwachsenen. Die Erwachsenen zahlten insgesamt 4500€ , die Jugendlichen insgesamt 900€ .
Berechne wieviele Erwachsene und Jugendliche sich eine Karte gekauft haben und wie hoch jeweils der Kartenpreis war.

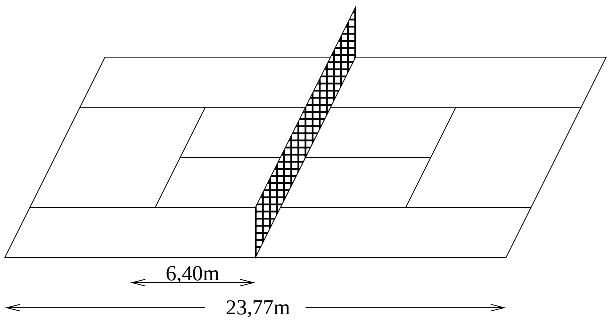
A80. Man schneidet aus einem Würfel einen Quader, indem man an der einen Seite einen, an der zweiten Seite zwei und an der dritten Seite drei Zentimeter abschneidet.
Der entstehende Quader hat eine Volumen, dass um 496cm^2 kleiner ist, als das des Würfels.
Berechne die Kantenlänge des Würfels.

A81. Die Grundseite eines Dreiecks mit einem Flächeninhalt von 18cm^2 ist um 5cm kürzer, als die dazu gehörige Höhe.
Berechne die Länge der Grundseite.

A82. Ein (recht langsames) Ultralight-Flugzeug fliegt ohne Windeinfluss 100km/h. Für einen Flug zu einem 360km entfernten Flugplatz braucht es mit Rückenwind 1,5 Stunden weniger als bei dem Rückflug gegen den (gleich starken) Wind.
Berechne die Windgeschwindigkeit.

A83. Auf dem 4,5km langen Nürburgring braucht ein Fahrer 5 Sekunden weniger pro Runde als sein Konkurrent. Nach 30 Minuten überholt er den Konkurrenten.
Berechne die gefahrenen Geschwindigkeiten.

A84. Ein Ball wird über der T-Linie eines Tennisplatzes in einer Höhe von 50cm getroffen.



Seinen höchsten Punkt erreicht er genau über dem Netz in 2m Höhe.
Berechne, ob der Ball das Feld trifft.

11.8 Fachbegriffe

Gestauchte Parabel

Eine Parabel, die 'breiter' ist als die Normalparabel. Der Faktor vor dem 'x^2 ist kleiner als 1.

Gestreckte Parabel

Eine Parabel, die 'schlanker' ist als die Normalparabel. Der Faktor vor 'x^2' ist größer als 1.

Normalparabel

Eine Parabel, wie sie sich ergibt, wenn das 'x^2' alleine steht, also außer mit 1, mit keinem weiteren Faktor multipliziert wird.

Parabel

Die Parabel ist der Funktionsgraph jeder quadratischen Funktion. Er besteht aus zwei 'Ästen', die symmetrisch zu einer senkrechten Geraden durch den Scheitelpunkt (höchster oder tiefster Punkt der Parabel) geht.

Quadratische Funktion

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsgleichung sich in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ schreiben lässt.

Scheitelpunkt

Der Scheitelounkt ist bei einer nach oben geöffneten Parabel der tiefste, bei einer nach unten geöffneten Parabel der höchste Punkt.
Durch diesen Punkt kann eine senkrechte Gerade gedacht werden und dann sind die Teile links und rechts dieser Geraden achsensymmetrisch.

Keine Panik!

12 Ganzrationale Funktionen

Wenn man allgemein aufschreibt, was eine ganzrationale Funktion eigentlich ist, sieht das ziemlich wirr und kompliziert aus. In Wirklickeit ist es, wie so meist, gar nicht so wild. Also keine Panik, ein paar Erklärungen folgen auch noch.

> Jede Funktion, die sich als:
>
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x^{[1]} + a_0 [x^0]$$
>
> schreiben lässt, heißt ganzrationale Funktion. Dabei sind die $a_n, a_{n-1} m \dots$ einfach Zahlen.
> In Worten ausgedrückt besteht eine ganzrationale Funktion aus Potenzen von 'x' (x^2, x^3, x^4 und so weiter), die jeweils mit einer Zahl multipliziert werden um dann anschließend alle addiert zu werden.
> Die höchste Potenz von 'x', die auch wirklich vorkommt, heißt: **Grad** der Funktion.

Wie schon geschrieben: Das Problem entsteht eigentlich erst dann, wenn man versucht *allgemein* auszudrücken, was eine ganzrationale Funktion ist. Wählt man einmal ein paar Beispiele, wird die Sache sofort etwas harmloser:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^3_2 x^2 - 5x + 7 \\
f_2(x) &= 5x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 5x + 2 \\
f_3(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 \\
f_4(x) &= x^{17} \\
f_5(x) &= x^2 - 3x + 1 \\
f_6(x) &= 2x + 3
\end{aligned}$$

Das sind nun erst mal sechs Beispiele für ganzrationale Funktionen. Die Funktion $f_1(x)$ hat den Grad 3, weil die höichste Potenz von 'x' eben 'x^3' ist.
Komplett analog hat $f_2(x)$ den Grad 6.
Die Funktion $f_3(x)$ zeigt, dass dabei gar nicht, ausgehend von der höchsten Potenz, alle Potenzen auch 'da' sein müssen. Sie sind übrigens da, man muss die Funktion dafür nur etwas komplizierter schreiben: $f_3(x) = x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1$. Und schon stimmt die Sache wieder. Der Grad der Funktion $f_3(x)$ ist übrigens 4.
$f_4(x)$ treibt das 'Weglassen' auf die Spitze. Hier ist nur noch eine Potenz 'da' und sie wird auch nur mit 1 multipliziert. Derartige ganzrationale Funktionen, die nur aus einer Potenz von 'x' bestehen, heißen übrigens auch: Potenzfunktion.
Tja, und $f_5(x)$ und $f_6(x)$ stehen eigentlich nur zur Beruhigung da. Die schon bekannten linearen und quadratischen Funktionen sind nämlich **auch** ganzrationale Funktionen.
Bevor auf die Eigenschaften der Graphen ganzrationaler Funktionen eingegangen werden soll, muss allerdings noch eine Bemerkung erfolgen: Wenn man ganz genau hinsieht, dann unterscheidet dich die Darstellung im Rahmen oben ein wenig von den Beispielen, die darunter stehen.
Die allgemeine Darstellung endet mit[1]: $\dots a_1 x^1 + a_0 x^0$ während etwa die Funktion $f_1(x)$ mit $\dots - 5x + 7$ endet.
Das Minuszeichen vor der 5 in Funktion $f_1(x)$ ist kein Problem, dass lässt sich einfach auch als Addition schrieben, aber wo ist das 'hoch 1' und vor allem das 'x hoch 0' geblieben, dass in der allgemeinen Form noch drinsteht.
Die Antwort ist einfach: Bei der Vorstellung der Potenzrechnung wurde darauf hingewiesen, dass jede Zahl hoch 1, immer wieder die ursprüngliche Zahl ist. Mit anderen Worten: x^1 und x sind das selbe, nur anders geschrieben und da es mühselig wäre das 'hoch 1' immer mitzuschreiben, lässt man den Exponenten einfach weg[2]

[1] Einiges davon ist allerdings in eckige Klammern eingeklammert — dazu gleich mehr.
[2] Bei der Betrachtung der Symmetrie ist er aber wichtig und sollte daher immer mit*gedacht* werden!

Ähnlich sieht es mit dem 'x^0' aus. Das jede Zahl 'hoch 0' immer gleich 1 ist, könnte man: 'a_0x^0' auch einfacher als '$a_0 \cdot 1$' schreiben und dann kann man das '$\cdot 1$' auch weglassen, da es in der Regel nicht gebraucht wird[3].

12.1 Schon bekannte Eigenschaften

Viele Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen sind uns schon bei den bisher besprochenen Funktionen begegnet, so dass hier nur kurz daran erinnert werden muss.
Zum Thema Definitions- und Wertemenge ist schon alles gesagt und daher braucht das hier nicht wiederholt zu werden.
Wie nicht anders zu erwarten, ist die Zahl, die 'ganz hinten' ohne 'x' steht, der y-Achsen-Abschnitt, oder, wenn man sich auf die allgemeine Darstellung bezieht, die Zahl 'a_0'.
Auch zu den Nullstellen ist im Kapitel über das Lösen von Gleichungen eigentlich schon alles gesagt. Um eine oder die Nullstellen einer Funktion[4] berechnen zu können, muss das '$f(x)$' gleich Null gesetzt werden. Die sich damit ergebende Gleichung ist dann zu lösen und man hat die Nullstellen.
Und auch die Frage nach der Symmetrie ist eigentlich schon beantwortet:

> Eine ganzrationale Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn alle Exponenten von 'x' ausschließlich **gerade** Zahlen sind.
> Eine ganzrationale Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems**, wenn alle Exponenten von 'x' ausschließlich **ungerade** Zahlen sind.

Hier muss man eigentlich nur auf das achten, was oben schon mal in einer Fußnote stand: Kommt ein 'einfaches' 'x', (scheinbar) ohne Expoenten, vor, dann muss man daran denken, dass $x = x^1$ und die '1' ist eine **ungerade** Zahl.
Und ebenfalls sollte man im Hinterkopf haben, dass die Zahl 'ohne 'x'' eben doch eine Potenz begestellt hat, nämlich: 'x^0' und die Null ist eine **gerade** Zahl.
Kommen gerade **und** ungerade Exponenten vor, dann kann man übrigens nicht sagen, dass der Graph der betreffenden Funktion nicht symmetrisch wäre, er kann immer noch symmetrisch sein, aber eben nicht von der Symmetrie, die ausschließlich betrachtet wird. Im Regelfall wird es ausreichen zu sagen, dass eine Symmetrie **nicht erkennbar** ist.

Aufgaben

A85. Gib bei den folgenden Funktionen an, ob eine Symmetrie eerkennbar ist und wenn ja, welche.

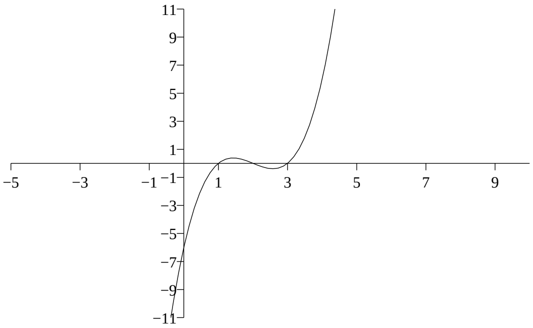
a)	$f(x) = x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 1$	b)	$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$
c)	$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$	d)	$f(x) = x^{12} - 1$
e)	$f(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 7x$	f)	$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 2$

12.2 The name of the game

Nun kann man sicherlich fragen, wieso derart unterschiedliche Funktionen unter einem Begriff zusammen gefasst werden. Nun, die Funktionsgleichungen haben zumindest gemeinsam, dass sie (im Wesentlichen) aus Potenzen von 'x' beruhen, aber haben die Graphen auch Gemeinsamkeiten? Wenn man an Geraden und Parabeln von den linearen oder quadratischen Funktionen denkt, scheint das ja erst mal nicht der Fall zu sein, aber wie sagte der Kaiser: "Schaum mer mal, dann sehn mer schon!"
Wie die Graphen der ganzrationalen Funktionen mit Grad 1 oder 2 aussehen, wissen wir ja schon[5].
Hier mal eine Funktion dritten Grades, die Funktion

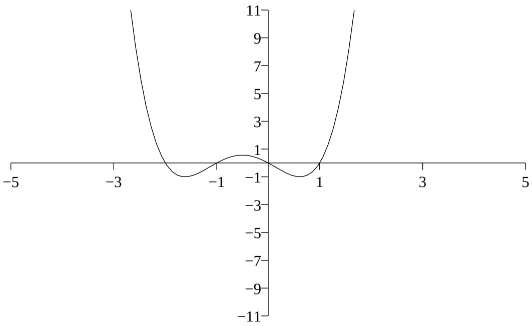
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

[3] Auch hier gilt allerdings die Sache mit der Symmetrie!
[4] Das gilt für alle Funktionen, nicht nur für die ganzrationalen.
[5] Notfalls im letzten Abschnitt nachlesen!

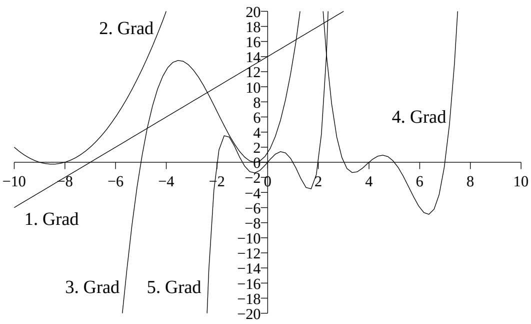


Und jetzt noch eine vierten Grades:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$



Und nun wirds spannend, man alle Grade von 1 bis 5 in einem Bild:



An diesem Bild kann man viel ablesen.
Zum Beispiel die **Nullstellen**. Die Funktion **1.** Grades hat **eine** Nullstelle. Die Funktion **2.** Grades **zwei** davon, die **3.** Grades **drei**, die des **4.** **vier** und die des **5.** Grades hat auf diesem Bild **fünf** Nullstellen.
Offenbar hat der Grad etwas mit der Anzahl der Nullstellen zu tun, aber halt! Wir wissen von den quadratischen Funktionen, dass diese zwei, eine oder auch keine Nullstelle haben können, daher muss es heißen: ”. . .bis zu. . .’ soundsoviel Nullstellen.
Und noch was fällt bei den Nullstellen auf, was aber eigentlich mit dem Verhalten im Unendlichen zu tun hat, über das gleich noch das eine oder andere zu sagen sein wird. Die Funktionen mit ungeradem Grad, kommen alle von ’unten links’ und gehen nach ’oben rechts’, kreuzen also mindestens einmal die x-Achse.
Zusammen gefasst:

> Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat bis zu n Nullstellen.
> Ist der Grad ungerade (1., 3., 5.,. . .), dann haben die Funktionen **mindestens** eine Nullstelle.

Außer der Aussage über die Nullstellen, lässt sich aber noch eine Gemeinsamkeit für die Graphen von ganzrationalen Funktionen finden, was mit Kurven zu tun hat. Am einfachsten versteht man diesen Zusammenhang, wenn man sich vorstellt, man würde mit einem Spielzeugauto den Graphen einer Funktion von links nach rechts entlang fahren.

Auf einer Geraden fährt dieses Spielzeugauto immer geradeaus. Auf einer Parabel fährt das Auto immer in einer Kurve[6]
Bei der Funktion dritten Grades sind es im obigen Bild schon zwei Kurven, erst eine Rechts- dann eine Linkskurve.
Da es mit den Kurven genau so ist, wie mit den Nullstellen, kann man daher sagen:

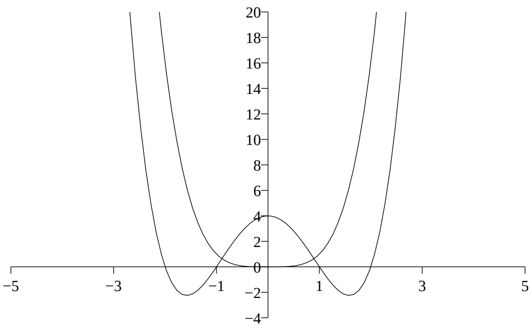
> Der Graph einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades hat bis zu $n-1$ Kurven.

12.3 Verhalten im Unendlichen

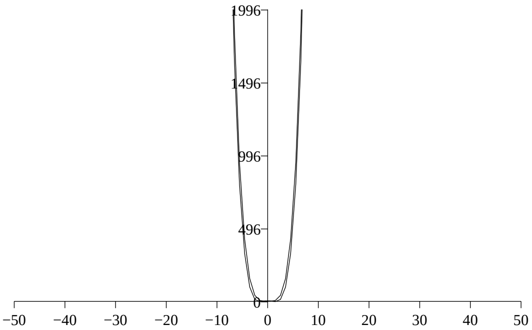
Bei ganzrationalen Funktionen hängt das Verhalten im Unendlichen ausschließlich von der höchsten vorkommenden Potenz und ihren Faktor ab. Die niedrigeren Potenzen spielen dabei keine wesentliche Rolle.
Um das zu verdeutlichen kann man sich mal die beiden Funktionen:

$$f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^4$$

ansehen. In der Nähe des Koordinatenursprungs unterscheiden sich die Verläufe der Graphen deutlich:



Vergrößerst mal allerdings den Ausschnitt der Graphen, dann sieht die Sache schon anders aus:



Man erkennt, dass sich die Verläufe der beiden Funktionsgraphen praktisch nicht mehr unterscheiden, wenn man die kleine Differenz im Bereich des Koordinatenursprungs nicht berücksichtigt.
Vom letzten Abschnitt her ist bekannt, dass die Graphen von ganzrationalen Funktionen mit einem geraden höchsten Exponenten von 'oben links' nach 'oben rechts' gehen, oder, etwas mathematischer ausgedrückt:

$$f(x) \to \infty \text{ für } x \to -\infty \quad \text{und} \quad f(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty$$

Für ganzrationale Funktionen mit ungeradem höchsten Exponenten gilt, dass ihre Graphen von 'unten links' nach 'oben rechts' verlaufen, oder:

$$f(x) \to -\infty \text{ für } x \to -\infty \quad \text{und} \quad f(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty$$

Aus dem Abschnitt über Transformationen ist weiter bekannt, dass die Multiplikation mit einer negativen Zahl, insbesondere der -1, zu einer Spiegelung an der x-Achse führt. Steht also vor der höchsten Potenz ein negativer Faktor, dann drehen sich die Graphen um und es gilt:

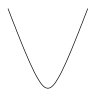
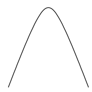
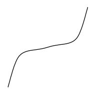
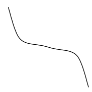
$$f(x) \to -\infty \text{ für } x \to -\infty \quad \text{und} \quad f(x) \to -\infty \text{ für } x \to \infty$$

[6] Auf einer nach oben geöffneten Parabel ist es eine Linkskurve, auf einer nach unten geöffneten eine Rechtskurve.

für den Graphen von ganzrationalen Funktionen mit geradem höchsten Exponenten und

$$f(x) \to \infty \text{ für } x \to -\infty \quad \text{und} \quad f(x) \to -\infty \text{ für } x \to \infty$$

für ungeraden höchsten Exponenten.
Und weil ein Bild mehr sagt, als tausend Worte, hier der generelle Verlauf von Graphen der ganzrationalen Funktionen im Überblick:

	Faktor positiv	Faktor negativ
Potenz gerade		
Potenz ungerade		

Mit 'Faktor' ist hier der Faktor der höchsten Potenz gemeint und mit 'Potenz' die höchste vorkommende Potenz.

Aufgaben

A86. Gibt das Verhalten der Funktionsgraphen der folgenden Funktionen im Unendlichen an.

a)	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 7$	b)	$f(x) = x^{17} - 3x^{11} + x^5$
c)	$f(x) = 4x^7 - 3x^5 + 3x$	d)	$f(x) = -x^6 + 3x^4 - 2x^2$
e)	$f(x) = -0,001x^7 + 0,023x^6 + 0,312x^5 - 7$	f)	$f(x) = 13x^6 - 12x^5 + 13x^7 - 5x + 2$

12.4 Fachbegriffe

Grad einer ganzrationalen Funktion

Der höchste vorkommende Exponent von 'x'.

Potenzfunktion

Eine Funktion, die **nur** aus einer Potenz von 'x' besteht und sonst nichts. Zu den Potenzfunktionen zählen etwa: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^5$ aber auch etwa eine Funktion wie $f(x) = x^{124}$

13 Exponentialfunktionen

13.1 Wachstum

Unter '*Wachstum*' versteht man in der Mathematik jede gleichförmige Änderung eines Wertes bei immer wieder gleicher Änderung eines anderen Wertes. Wird das Wachstum duch eine Funktion beschrieben, dann spricht man dann von einem Wachstum, wenn sich bei Erhöhung des Wertes für 'x' um eins in immer gleicher Art und Weise eine Erhöhung oder Verminderung des '$f(x)$'-Wertes ergibt.
Typische Beispiele für Wachstum sind:

1. Bei einer gleichförmigen Fahrt mit einem Auto erhöht sich die zurück gelegte Strecke zu jeder Zeiteinheit (z.B. Stunde) um den gleichen Betrag.
2. Auf ein Kapital werden jedes Jahr der gleiche Prozentsatz an Zinsen bezahlt (und das Kapital wird nicht angetastet).
3. Aus einer Schachtel mit Pralinen wird jeden Tag eine Praline entnommen.
4. Bei einer Masse radioaktiven Materials zerfällt in jedem Jahr der gleiche Prozentsatz an radioaktiven Atomen.

Im Gegensatz um Alltagsgebrauch wird in der Mathematik also auch dann von einem 'Wachstum' gesprochen, wenn es sich um eine Abnahme handelt.
Es gibt eine Reihe von mathematischen '*Modellen*', mit denen Wachstum beschrieben werden kann. Die im schulischen Umfeld wichtigsten sind das '**Lineare Wachstum**' und das '**Exponentielle Wachstum**'.

13.1.1 Lineares Wachstum

Von **linearem Wachstum** ist in der Mathematik[1] die Rede, wenn bei einer Erhöhung des Wertes von 'x' zu dem Funktionswert immer die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird. Das lineare Wachstum kann immer durch eine lineare Funktion beschrieben werden.
Beispiel: Ein Mann hat 200 Euro. Um einen gewissen Sparbetrag zu erhalten, fügt er diesem Betrag monatlich einen Betrag von 50 Euro hinzu.
Der Betrag von 200 Euro entspricht der gesparten Summe zu Beginn des 'Sparvorgangs', also zu einem Zeitpunkt, der mit $x = 0$ beschrieben werden kann, da ja noch keine Zeit vergangen ist, an dem weitere Beträge hinzu gekommen sind. Die 200 steht also für den y-Achsen-Abschnitt.
Der Betrag von 50 Euro entspricht der Steigung, da nach jedem Monat jeweil 50 Euro hinzu kommen (Nach einem Monat $1 \cdot 50$, nach zwei Monaten $2 \cdot 50$, usw.)
Insgesamt lässt sich also dieses Wachstum durch die Funktion

$$f(x) = 50x + 200$$

beschreiben. Der Funktionswert an einer bestimmten Stelle (einem bestimmten Wert für 'x') gibt dabei immer die bis dahin gesparte Gesamtsumme an. So ergibt sich für den Zeitpunkt nach fünf Monaten:

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 \cdot 50 + 200 \\ &= 250 + 200 \\ &= 450 \end{aligned}$$

Also, dass nach fünf Monaten insgesamt 450 Euro gespart wurden.

Aufgaben

A87. Nach dem Start erreicht ein Flugzeug die Reiseflughöhe in einer Entfernung vom Startflugplatz von 250km. Ab diesem Moment nähert sich das Flugzeug dem Ziel mit einer konstanten Geschwindigkeit von 800km/h.
Beschreibe dieses Wachstum durch eine (lineare) Funktion.

A88. Familie Meier hat 2000 Euro in den Urlaub mitgenommen. Sie planen jeden Tag 200 Euro auszugeben.
Beschreibe dieses Wachstum durch eine Funktion.

[1] Ab hier wird das Wachstum immer durch eine Funktion beschrieben!

13.1.2 Exponentielles Wachstum

Von exponentiellem Wachstum spricht man in der Mathematik, wenn bei Erhöhung des Wertes von 'x' der Funktionswert immer mit der gleichen Zahl multipliziert wird. Diese Zahl heißt **Wachstumfaktor**. Ist die Zahl größer als Eins, ergibt sich eine (exponentielle) Zunahme, ist sie kleiner als Eins, eine Abnahme.
Exponentielles Wachstum kann durch eine **Exponentialfunktion** beschrieben werden. Diese hat die Form:

$$f(x) = c \cdot a^x$$

Dabei ist 'c' der Anfangswert, weil sich für $x = 0$ immer ergibt $a^0 = 1$ und somit gilt: $f(0) = c \cdot a^0 = c\dot{1} = c$. '$a$' ist der Wachstumsfaktor mit dem der Bestand bei jeder Erhöhung von 'x' um den Wert 1 multipliziert wird.
Ein typisches Beispiel für das exponentielle Wachstum ist die Anlage eines Kapitals zu einem bestimmten Zinssatz. Angenommen Familie Müller legt 1000 Euro zu einem Zinssatz von 0,5%[2] an. Nach einem Jahr besitzt die Familie ihr Kapitel von 1000 Euro und bekommt zusätzlich die Zinsen hinzu gezahlt. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$\begin{aligned} 1000 + 1000 \cdot 0,005 &= 1000 \cdot (1 + 0,005) \\ &= 1000 \cdot 1,005 \\ &= 1005 \end{aligned}$$

Bei der ersten Umformung wurde die '1000' ausgeklammert und es wird erkennbar, dass nach einem Jahr das ursprüngliche Kapital mit dem Faktor 1,005 multipliziert wurde.
Zu Beginn des zweiten Jahres besitzt die Familie ein Kapital von 1005 Euro und auch dieses Kapital wird dann verzinst:

$$\begin{aligned} 1005 + 1005 \cdot 0,005 &= 1005 \cdot (1 + 0,005) \\ &= 1005 \cdot 1,005 \\ &= 1010,025 \end{aligned}$$

Auch in diesem zweiten Schritt (Jahr) wird das Kapital, also der Funktionswert wieder mit 1,005 multipliziert[3]. Insgesamt ergibt sich aus den beiden obigen Rechnungen:

$$\begin{aligned} 1010,025 &= 1005 \cdot 1,005 \\ &= 1000 \cdot 1,005 \cdot 1,005 \qquad \text{Nach der ersten Rechnung!} \\ &= 1000 \cdot 1,005^2 \end{aligned}$$

Entsprechend beträgt das Kapital der Familie Müller nach drei Jahren: $1000 \cdot 1,005^3$ Euro.
Dieser Zusammenhang lässt sich durch die Funktion

$$f(x) = 1000 \cdot 1,005^x$$

beschreiben.

Weiterführende Bemerkung

Aufgrund unserer Entwicklungsgeschichte sind wir Menschen nicht in der Lage exponentielles Wachstum intuitiv zu erfassen, was durch das folgende Beispiel verdeutlicht werden kann.

> *Auf einem See schwimmt eines Tages eine Seerose. Am Folgetag sind es schon zwei Seerosen und auch in den weiteren Tagen verdoppelt sich die Anzahl der Seerosen von Tag zu Tag.*
> *Nach 32 Tagen ist der See vollständig von Seerosen bedeckt.*
> *An welchem Tag war der Teich zur Hälfte mit Seerosen bedeckt?*

Intuitiv wird man versucht sein zu sagen, dass der See nach 16 Tagen zur Hälfte bedekt war. Tatsächlich aber ist dies natürlich am 31. Tag der Fall gewesen.
Bei allen Zusammenhängen, in denen exponentielles Wachstum eine Rolle spielt, sollte daher **immer** gerechnet werden und man sollte sich nicht auf seinen ersten Eindruck verlassen. Dies gilt z.B. für Kreditverträge, bei denen für eine aufgenommene Summe ein gewisser Prozentsatz an Zinsen zu zahlen ist. Auch bei klein erscheinenden Zinssätzen kann die zu erstattende Summe leicht das Doppelte der ursprünglichen Summe ausmachen.

---

2 Im weiteren wird mit: $0,5\% = 0,005$ gerechnet!

3 Das es den Betrag von 1010,025 in Euromünzen nicht geben kann, soll hier nicht weiter interessieren - es ist ja nur ein Beispiel.

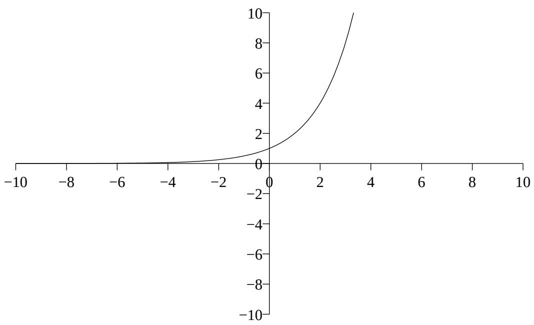
Aufgaben

A89. Von 1000gr einer radioaktiven Substanz zerfallen pro Jahrtausend 25% der Atome.
Beschreibe dieses Wachstum (diesen Zerfall) durch eine Funktion, mit der ermittelt werden kann, wieviel Gramm der Substanz nach einer Anzahl von Jahrtausenden noch nicht zerfallen ist.
Tipp: Beachte, dass angegeben ist, wieviel Prozent der Atome zerfallen. Überlege zunächst, wieviel Prozent noch übrig bleiben.

A90. Für einen Laborversuch wird eine Bakterienkultur mit einer Million Bakterien angelegt. Aus Erfahrung weiß man, dass die Kultur pro Stunde auf das 1,2fache anwächst.
Gib eine Funktion an, mit der die Anzahl der Bakterien nach einer bestimmten Anzahl von Stunden angewachsen ist.

13.2 Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktionen

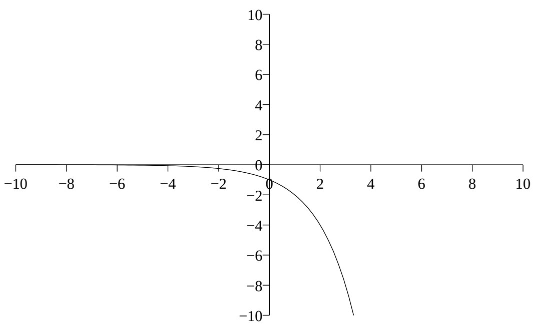
In Abhängigkeit von den Werten für 'c' und 'a' gibt es nur vier Grundtypen von Exponentialfunktionen. Dabei ist von Interesse, ob 'c' positiv oder negativ ist und ob 'a' größer oder kleiner als Eins ist[4].
Ist $c > 0$ und $a > 1$ ergibt sich der folgende Verlauf:



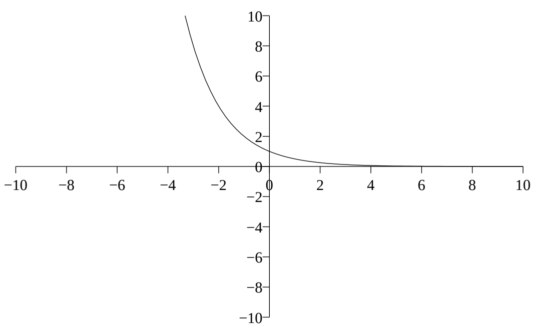
Hier wurde die Funktion

$$f(x) = 1 \cdot 2^x$$

dargestellt.
Ist $c < 0$ und $a > 1$ ergibt sich, nun am Beispiel: $f(x) = -1 \cdot 2^x$

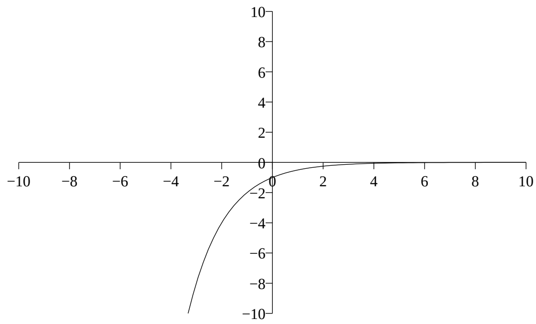


Ist nun $c > 0$ und $a < 1$ ändert sich das Bild zu ($f(x) = 1 \cdot 0,5^x$):



Und wenn $c < 0$ und $a < 1$ ist, dann ergibt sich etwa bei $f(x) = -1 \cdot 0,5^x$:

[4] Man beachte, dass nach den Regeln für die Potenzrechnung der Wert von a immer eine positive Zahl sein muss.



Es ist erkennbar, dass die Definitionsmenge der Exponentialfunktionen immer alle Zahlen ($\mathbb{R}$) sind. Die Wertemenge besteht immer aus allen positiven oder allen negativen Zahlen (Siehe auch obige Abbildungen).
Exponentialfunktionen haben **kein** erkennbares Symmetrieverhalten und auch **keine** Nullstellen.
Für das Verhalten im Unendlichen gilt folgendes: Auf der einen Seite (bei $a > 1$ rechts, bei $a < 1$ links) streben die Funktionswerte gegen positiv oder negativ Unendlich (s.o.). Auf der jeweils anderen Seite nähern sich die Funktionswerte immer mehr der Null an. Für $c > 0$ und $a > 1$ ergibt sich etwa:

$$f(x) \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \qquad \text{und} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to -\infty$$

Der y-Achsen-Abschnitt ist immer gleich dem Wert von 'c'.

13.2.1 Die Eulersche Zahl

Gerade bei der Beschreibung von *natürlichen* Wachstums- oder Zerfallsprozessen tritt häufig der Wachstumsfaktor 'e' auf. Bei 'e' handelt es sich um die sogenannte 'Eulersche Zahl'. Es ist eine irrationale Zahl mit dem ungefähren Wert:

$$e \approx 2.718281828459045\ldots$$

Aus diesem Grunde treten im schulischen Umfald nahezu ausschließlich Exponentialfunktionen mit diesem Wachstumsfaktor auf. Die Funktionen, die in der Schule behandelt werden haben also praktisch alle die Form:

$$f(x) = c \cdot e^{\text{Term}}$$

Diese Funktionen werden allgemein e-Funktionen genannt.
Durch sie tritt praktisch nie der Fall auf, dass $a < 1$ ist[5].

13.3 Zusammengesetzte Funktionen

Exponentialfunktionen werden auch mit ganzrationalen Funktionen kombiniert. Dies geschiet zumeist in der Form:

$$f(x) = \text{Ganzratonale Funktion} \cdot \text{Exponentialfunktion}$$

als Beispiel etwa:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^x$$

Das Aussehen und der Verlauf der Graphen von diesen Funktionen hängt in starkem Maße von dem Zusammenwirken der beiden Funktionsteile ab und kann daher nicht allgemein besprochen werden.
Im Gegensatz zu den (einfachen) Exponentialfunktionen können diese Funktionen auch Nullstellen haben. Diese hängen allerdings ausschließlich von dem ganzrationalen Anteil ab, da der exponentielle keine (eigenen) Nullstellen besitzt!

13.4 Fachbegriffe

[5] Auch andere Exponentialfunktionen lassen sich mit dem Faktor $a = e$ darstellen, aber das überschreitet den normalen Umfang schulischer Mathematik.

Ausgangswert

Der Ausgangswert beschreibt immer den Zustand eines Wachstumsmodells zu Beginn des zu untersuchenden Zeitraums. Im Falle des linearen Wachstums entspricht er dem y-Achsen-Abschnitt der linearen Funktion (normalerweise 'n'), während bei exponentiellem Wachstum dieser Wert durch 'c' festgelegt ist.

Exponentielles Wachstum

Ein Wachstum, bei dem die zu untersuchende Menge bei jedem Schritt mit einem Wachstumsfaktor **multipliziert** wird.

Lineares Wachstum

Ein Wachstum, bei der zu untersuchenden Menge bei jedem Schritt der gleiche Betrag **addiert** (Zunahme) oder **subtrahiert** (Abnahme) wird.

Wachstumsfaktor

Bei exponentiellem Wachstum wird der zu untersuchende Menge bei jedem Schritt mit diesem Wert **multipliziert**. In der allgemeinen Funktionsgleichung von Exponentialfunktionen entspricht dies dem Wert von 'a'.

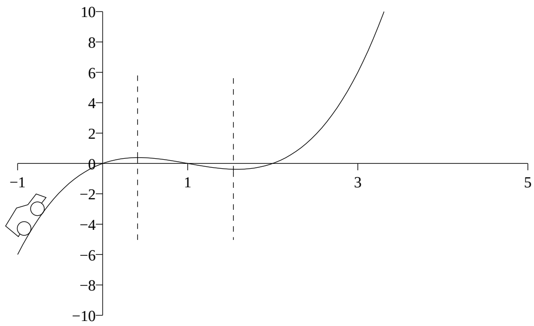
Keine Panik!

14 Der Begriff der Ableitung

Das aktuelle Kapitel dient eher der Hintergrundinformation. Die Inhalte dieses Kapitels werden in der 'täglichen Arbeit' zu einem großen Teil nicht weiter benötigt. Trotzdem kann es in dem einen oder anderen Fall sinnvoll sein, sich die hier beschriebenen Zusammenhänge deutlichzu machen.

14.1 Monotonie

Betrachtet man den folgenden Funktionsgraphen



dann sind drei unterschiedliche Bereiche intuitiv sofort unterscheidbar. In der Zeichnung sind sie durch senkrechte, gestrichelte Linien voneinander getrennt. Der Bereich ganz links geht von minus Unendlich bis ca. 0,4, der zweite von 0,4 bis ca. 1,6 und der dritte von 1,6 bis plus Unendlich.

Stellt man sich vor bei diesem Funktionsgraphen würde es sich um den Schnitt eines Geländes handeln und über dieses dann ein Auto fahren, wie es im obigen Bild angedeutet ist. Dann muss dieses Auto im ersten Bereich 'bergauf' fahren, im zweiten dann 'bergab', um dann im letzten Bereich wieder 'nach oben' zu fahren.

Diese Umstände werden in der Mathematik als 'Monotonie' bezeichnet[1]. Im ersten Bereich, dem von minus unendlich bis ca. 0,4, ist die Funktion **monoton steigend**, danach **monoton fallend**, um danach wieder monoton steigend zu werden.

Dieser Begriff soll im vorliegenden Kapitel genauer gefasst werden und 'berechenbar' werden.

14.2 Die Erweiterung der Steigung

Die Situation, dass ein Funktionsgraph von links nach rechts ansteigt oder abfällt ist uns schon bei den linearen Funktionen begegnet. Dort wurde dieser Umstand durch eine Zahl beschrieben, die den Namen '*Steigung*' hatte.

Ein wichtiger Umstand bei dem Begriff der Steigung lag darin, dass er sich auf Geraden bezog (Graphen der linearen Funktionen) und diese *überall* die gleiche Steigung hatten[2].

Nun ist es allerdings offensichtlich, dass die Frage, wie 'steil' es nach oben oder unten geht, bei gekrümmten Funktionsgraphen, wie dem obigen, sich von Punkt zu Punkt ändert. Daher ist der Begriff der Steigung nicht auf gekrümmte Funktionsgraphen anwendbar.

Aus diesem Grunde wurde der Begriff der Steigung so erweitert, dass:

1. der neue Begriff auf einen einzelnen Punkt eines Funktionsgraphen anwendbar ist.
2. der neue Begriff auf eine Gerade angewendet den gleichen Wert ergibt, wie die Steigung.
3. der neue Begriff 'intuitiv' verständlich sein soll.

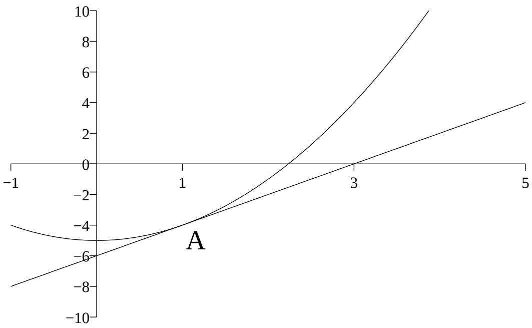
Dieser neue Begriff konte gefunden werden und es ist:

[1] Das hat also nichts mit Langeweile zu tun!

[2] Was sich auch dem Unstand zeigte, dass das sogenannte Steigungsdreieck an jedem Punkt der Geraden gezeichnet werden konnte.

> Die **Ableitung** einer Funktion im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ ihres Funktionsgraphen ist gleich der Steigung der Tangente an diesen Punkt.
> Ist der x-Wert dieses Punktes 'x_0' (der y-Wert ergibt sich aus der Funktionsgleichung), dann wird diese Ableitung mit
>
> $$f'(x_0)$$
>
> bezeichnet (gesprochen: 'F-Strich von X-Null').

Ein Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2 - 5$ hat im Punkt $A(1/-4)$ eine Tangente mit der Gleichung: $t(x) = 2x - 6$.



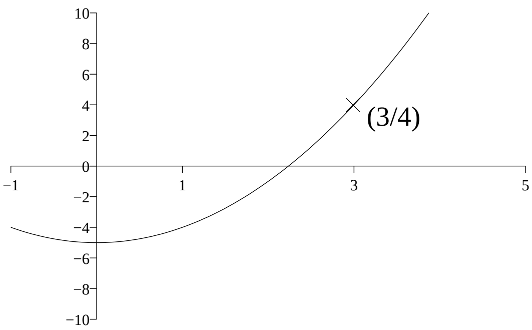
Da die Tangente an diesen Punkt die Steigung 2 hat, gilt für die Funktion: $f'(1) = 2$.
Es ist offenkundig, dass die Ableitung nur für einen Punkt gilt, nämlich dem Berührpunkt der Tangente an den Funktionsgraphen. Ebenso klar sollte sein, dass, wenn man den neuen Begriff der ABleitung auf eine Gerade anwendet, sich wieder die Steigung ergibt. Denn eine Tangente an eine Gerade muss immer die Gerade selbst sein und diese hat natürlich die gleiche Steigung. Und auch die dritte Forderung konnte erfüllt werden, denn wenn die Ableitung größer ist als Null, dann steigt der Funktionsgraph an dieser Stelle monoton an, ist sie negativ, fällt er ab.

14.3 Zur Bestimmung der Ableitung

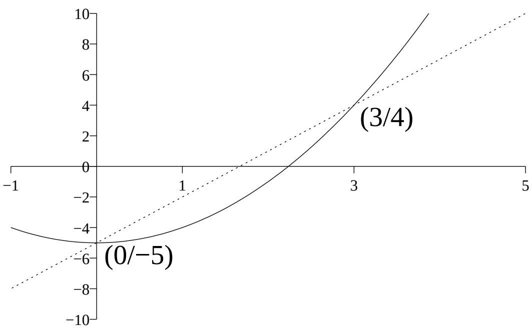
Einen Haken hat die Sache allerdings noch. Es mag zwar leicht erscheinen eine Tangente an einen Funktionsgraphen anzeichnen zu können, dies aber in konkrete Zahlen umzusetzen ist nicht ganz so einfach.

14.3.1 Von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate

Am einfachsten bekommt man einen Überblick darüber, wie man die Steigung der Tangenten an einen Punkt eines Funktionsgraphen, gleich der Ableitung der Funktion an diesem Punkt, berechnen kann, wenn man sich ein Beispiel ansieht.
Zu diesem Zweck soll wieder die obige Funktion, $f(x) = x^2 - 5$, betrachtet werden, nun allerdings an der Stelle $x = 3$. Die zugehörige y-Koordinate lässt sich leicht berechnen, denn es ist: $3^2 - 5 = 4$, der Punkt hat also die Koordinaten (3/4).



Es ist nicht möglich unmittelbar und sofort die Gleichung oder die Steigung der Tangenten an diesen Punkt zu bestimmen. Statt dessen muss man sich diesem Wert '*annähern*. Dazu nimmt man zunächst einen weiteren, im Prinzip vollkommen frei w—"ahlbaren Punkt auf dem Funktionsgraphen hinzu. Als Beispiel soll hier der Punkt $(0/-5)$ genommen werden. Durch diese beiden Punkte lässt sich nun einfach eine Sekante zeichnen:



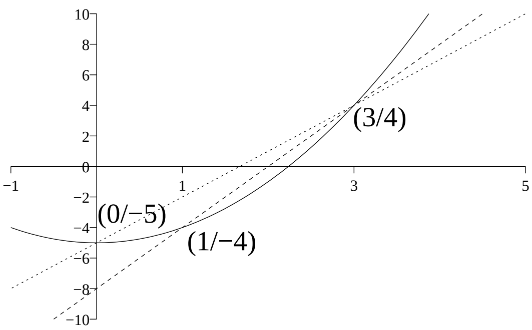
Aber mehr noch, aus dem Kapitel über die Bestimmung linearer Funktionsgleichungen ist noch die Steigungsformel bekannt, mit deren Hilfe die Steigung dieser Sekante berechnet werden kann.
Die Steigungsformel war:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

was für hier bedeutet:

$$m = \frac{4 - (-5)}{3 - 0} = \frac{9}{3} = 3$$

Die Steigung der Sekanten[3] ist also 3. Man nennt diese Sekantensteigung auch **Durchschnittliche Änderungsrate**, da zwischen den x-Werten 0 und 3 der Funktionsgraph durchschnittlich 3 Einheiten pro einer Einheit nach links ansteigt.
Dieser Wert ist offenbar, wenn man die obige Skizze betrachtet, kleiner als es die Steigung einer Tangenten an den Punkt (3/4) wäre.
Nun kommt das, was ich oben mit '*annähern*' bezeichnet habe. Dazu wählt man nun einen neuen x-Wert, der 'näher' an der 3 des gesuchten Punktes liegt. Ich wähle den Wert $x = 1$, woraus sich der Punkt $(1/-4)$ ergibt. Auch hier lässt sich wieder eine Sekante einzeichnen und ihre Steigung berechnen.



Die Steigung ist:

$$m = \frac{4 - (-4)}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Dieses Verfahren kann man nun so fortsetzen, dass immer neue x-Werte gewählt werden, die immer näher an der 3 liegen. Und immer ergibt sich so ein weiterer Punkt des Funktionsgraphen, mit dessen Koordinaten man die Steigung der zugehörigen Tangente berechnen kann. In der folgenden Tabelle sind mehrere solche x-Werte und die sich daraus ergebende Sekantensteigung dargestellt[4]:

Gewählter x-Wert	**Resultierende Sekantensteigung**
0	3
1	4
2	5
2,5	5,5
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999
...	...

Es ist ganz offenbar so, dass sich der Wert der Sekantensteigung immer mehr dem Wert 6 annähert, je näher man den zweiten x-Wert an die 3 heranführt und damit ist es sicherlich sinnvoll die Steigung der Tangenten mit 6 anzunehmen, oder anders gesagt: $f'(3) = 6$.

[3] Da uns nur die Steigung interessiert, ist es nicht erforderlich die gesamte Gleichung der Sekante zu bestimmen!
[4] Die beiden ersten Zeilen der Tabelle entsprechen den schon berechneten Werten!

Die Steigung der Tangente ist bestimmt und damit die Ableitung an der Stelle $x = 3$. Dieser Wert wird auch als **momentane Änderungsrate** bezeichnet, weil er sich nur auf den Punkt (3/4) bezieht.

Etwas genauer

Beim obigen Beispiel lagen alle Werte, die für 'x' gewählt wurden, links des entscheidenden Punktes (3/4) und die gewählten Werte näherten sich der 3 auch von links an.
Streng genommen müsste man das gleiche Verfahren auch 'von rechts' her durchführen und nur dann, wenn auch auf diesem Wege der gleiche Wert heraus kommt, kann man erst von der Ableitung sprechen.

Aufgaben

A91. Bestimme nach der obigen Methode die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ für den x-Wert $x = -1$.

14.4 Die h-Methode

Das oben dargestellt Verfahren hat den Vorteil einigermaßen anschaulich zu sein, allerdings die Nachteile, dass es zum einen sehr aufwändig ist, zum anderen außer Acht lässt, dass man '*eigentlich*' dieses Verfahren von rechts und links anwenden muss. Um diese Nachteile zu vermeiden, kann man die sogenannte h-Methode anwenden.
Bei obigem Verfahren wurden zu dem entscheidenden Punkt weitere x-Werte ausgesucht, die dann immer näher an den eigentlichen Punkt heran geführt wurden. Statt nun ausdrückliche x-Werte zu nehmen kann man auch einfach den Abstand des neuen Punktes zum eigentlich interessanten angeben. Die obige Tabelle würde sich dann ändern zu:

Gewählter x-Wert	**Abstand zur 3**	**Resultierende Sekantensteigung**
0	3	3
1	2	4
2	1	5
2,5	0,5	5,5
2,9	0,1	5,9
2,99	0,01	5,99
2,999	0,001	5,999
...	...	

Aber statt nun die ganzen Berechnungen mit dem Abstand durchzuführen, kann auch für diesen Abstand eine Variable verwendet werden. Diese Variable wird überlicherweise 'h' genannt[5]. Da außerdem nicht festgelegt ist, ob der Wert von 'h' positiv oder negativ ist, können beide Fälle, der von rrechts wie der von links, 'auf einen Rutsch' erledigt werden.
Zunächst einmal theoretisch: Angenommen wir wollten die Tangentensteigung einer Funktion an einer Stelle $x = x_0$ bestimmen. Zunächst muss dann der zugehörige y-Wert bestimmt werden, aber dieser ist einfach: $f(x_0)$. Nun kommt der zweite x-Wert ins Spiel, diesmal allerdings ausgedrückt durch den Abstand. Dieser zweite Wert ist nun: $x = x_0 + h$, was nichts anderes ausdrückt, als dass sich dieser x-Wert vom ersten durch den Wert von 'h' unterscheidet. Der zugeh—"orige y-Wert ist dann: $f(x_0 + h)$.
Nachdem nun ddie beiden Punkte bekannt sind, kann die Steigung der Sekante durch diese beiden Punkte mit der Steigungsformel berechnet werden:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h \quad - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Bis hierhin ist nicht unbefingt ersichtlich, worin denn der Vorteil der h-Methode gegenüber der ersten Methode liegt. Das ändert sich allerdings, wenn man diese Methode einmal an einer konkreten Funktion an einem konkreten Punkt anwendet.
Für die Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$ soll $f'(2)$ bestimmt werden. Der y-Wert zum x-Wert 2 ist ebenfalls 2, so dass nun klar ist, dass die Tangente an den Punkt (2/2) angelegt werden soll und ihre Steigung bestimmt werden soll.

[5] Daher auch der Name dieser Methode.

Für den x-Wert $x = 2 + h$ ergibt sich folgender y-Wert:

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 - 3(2+h) + 4 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 4 \\ &= h^2 + h + 2 \end{aligned}$$

Damit hat der zweite Punkt die Koordinaten $(2 + h/h^2 + h + 2)$. Setzt man diese beiden Punkte in die obige Formel ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} m &= \frac{h^2 + h + 2 \quad - \quad 2}{h} \\ &= \frac{h^2 + h}{h} \\ &= \frac{h(h+1)}{h} \\ &= h + 1 \end{aligned}$$

Die zugehörige Sekantensteigung hat also den Wert '$h + 1$'. Es ist leicht zu sehen, in welche Richtung sich der Wert dieses Terms bewegt, wenn der Abstand h immer kleiner werden soll und sich immer mehr der Null annähern soll:

$$h + 1 \to 1 \quad \text{für} \quad h \to 0$$

Und damit ist dann auch schon die Tangentensteigung oder die Ableitung gefunden! Es gilt: $f'(2) = 1$

Aufgaben

A92. Berechne nach der h-Methode die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 2$ an der Stelle $x_0 = 3$.

14.5 Die Ableitungsfunktion

Die h-Methode bringt schon einiges an Arbeitserleichterung, aber es geht noch einfacher. Die Grundidee der h-Methode bestand ja darin für den Abstand von dem Punkt, an dem die ABleitung berechnet werden soll, eine Variable einzusetzen.
Diese Idee kann man weiter treiben und auch für den x-Wert, an dem die Ableitung berechnet werden soll, eine Variable einzusetzen. Auf diesem Weg kann man eine 'ABleitungsformel' erstellen, mit der sofort für alle beliebigen x-Werte die Ableitung einer Funktion bestimmen zu können.
Auch das sollte am besten mit einem Beispiel erklärt werden. Genommen werden soll die obige Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Setzt man hier die entsprechenden Werte, diesmal aber den x-Wert als Varaiable, wieder in die Steigungsformel ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 4 - [x^2 - 3x + 4]}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 4 - x^2 + 3x - 4}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\ &= \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= 2x + h - 3 \end{aligned}$$

Läuft in dieser 'Formel' der Wert für 'h' gegen Null, dann nähert sich der Term immer mehr dem Term: $2x - 3$ an und es ist sinnvoll diesen Term als 'Ableitungsterm' zu verwenden.
Probieren wir diesen Term einmal aus. Oben wurde für diese Funktion berechnet: $f'(2) = 1$. Setzt man nun die '2' in den Term ein, erhält man: $2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$, also tatsächlich den Wert für die Ableitung, der auch oben berechnet wurde.
Der große Vorteil besteht nun darin, dass nun auch die Ableitungen an anderen Stellen berechnet werden können, ohne erneut die h-Methode anwenden zu müssen. So ist nun etwa:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$$

14.5.1 Benennung

Es ist nun sicherlich nicht befriedigend, wenn man eine derartig gefundenen 'Ableitungsformel' nicht angemessen bezeichnen kann. Vor allem wird der Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Funktion und der 'Formel' nicht deutlich.

> Gibt es zu einer Funktion $f(x)$ eine weitere Funktion $f'(x)$ die zu jedem Wert für 'x' den Wert der Ableitung der Funktion $f(x)$ an dieser Stelle zurück gibt, dann heißt diese Funktion: **Ableitungsfunktion**!

Für das obige Beispiel bedeutet das:

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 3$$

Achtung! Es gibt ein 'beliebtes' Missverständnis, das auch durch die sehr ähnliche Bezeichnung befördert wird:

> Steht in dem Ausdruck '$f'(\ldots)$ eine **Zahl**, also etwa '$f'(2)$', dann bedeutet dieser Ausdruck eine **Zahl**, nämlich genau die Ableitung an der Stelle, die angegeben ist.
> Steht in dem Ausdruck '$f'(\ldots)$ ein 'x', also '$f'(x)$', dann bedeutet er eine **Funktion**, nämlich die Ableitungsfunktion, mit der die Ableitung an jeder beliebigen Stelle berechnet werden kann.

Man sollte also immer zwischen **Ableitung** und **Ableitungsfunktion** unterscheiden!

14.6 Fachbegriffe

Ableitung
: Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ist gleich der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen dieser Funktion an dieser Stelle. Mit der Ableitung kann die Monotonie der Funktion an dieser Stelle bestimmt werden.

Ableitungsfunktion
: Die Ableitungsfunktion, geschrieben: '$f'(x)$', ist eine Funktion, die zu einer gegebenen Funktion '$f(x)$' die Ableitung für jeden Wert von 'x' zurück gibt.

Durchschnittliche Änderungsrate
: Wählt man auf einem Funktionsgrahen zwei Punkte und berechnet die Steigung der Sekanten durch diese beiden Punkte, dann gibt dieser Wert die durchschnittliche Veränderung der Funktionswerte im Bereich dieser beiden Punkte an.

Momentane Änderungsrate
: Die momentane Änderungsrate einer Funktion in einem Punkt entspricht der Ableitung dieser Funktion in diesem Punkt.

Monotonie
: Die Monotonie einer Funktion gibt an, ob sich der Graph einer Funktion in dem untersuchten Bereich anhebt oder absinkt.

Keine Panik!

15 Ableitungsregeln

Im letzten Abschnitt des letzten Kapitels wurde beschrieben, wie man mit der h-Methode zu einer Funktion deren Ableitungsfunktion bestimmen kann. Diese Methode Ableitungen zu berechnen ist schon reichlich effizient, aber es geht noch einfacher. Es existieren eine ganze Reihe von Regeln, mit denen man aus einer gegebenen Funktion sofort die Ableitungsfunktion bestimmen kann. Diese Regeln werden in diesem Kapitel gesondert vorgestellt, weil sie sehr häufig zur Anwendung kommen.

15.1 Die 'einfachen' Regeln

Vor allem im Grundkurs sind es es vor allem drei Regeln, die immer wieder zur Anwendung kommen. Sie reichen zum Beispiel, um alle ganzrationalen Funktionen ableiten[1] zu können.

15.1.1 Die Potenzregel

Besteht eine Funktion nur aus einer Potenz von 'x', handelt es sich also um eine Potenzfunktion, dann gilt:

> Hat eine Funktion die Form:
>
> $$f(x) = x^n$$
>
> dann ist ihre Ableitungsfunktion:
>
> $$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Mit dieser Regel ergibt sichzum Beispiel:

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 & \Rightarrow & f'(x) = 2x^{[1]} = 2x \\ f(x) = x^5 & \Rightarrow & f'(x) = 5x^4 \\ f(x) = x^12 & \Rightarrow & f'(x) = 12x^{11} \end{array}$$

15.1.1.1 Sonerfälle

Es gibt einen Sonderfall, der, obwohl er genau der Regel entspricht, dennoch etwas heraussticht:

$$f(x) = x^0[= 1] \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0x^{-1}[= 0]$$

oder kürzer:

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Auf diesen Sonderfall wird später noch eingegangen.
Außerdem soll auch nicht unerwähnt bleiben, dass die Potenzregel auch in 'komplizierteren' Fällen anwendbar ist, womit die Fälle gemeint sind, in denen der Exponent der Potenz nicht aus einer natürlichen Zahl besteht.
Ist etwa die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, dann lässt sie sich nach den Potenzgesetzen auch als $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und dann nach der Potenzregel ableiten:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Das gilt auch für andere Exponenten gleicher Art:

$$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

Nun sind bei den letzten Beispielen auch negative Exponenten von 'x' aufgetreten. Keine Angst, die Potenzregel gilt auch in solchen Fällen, zum Beispiel

$$f(x) = x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3x^{-4}$$

eigentlich ganz einfach.

[1] Die Bestimmung der Ableitungsfunktion zu einer gegebenen Funktion wird oftmals einfach als 'ableiten' bezeichnet.

15.1.2 Die Summenregel

Ist der Funktionsterm einer Funktion ein Summenterm, dann gilt:

> Hat eine Funktion die Form
>
> $$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$$
>
> dann gilt:
>
> $$f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

Vereinfacht lässt sich sagen, dass die Summanden einer Funktion einfach einzeln abgeleitet werden können. Auch hier ein paar Beispiele:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^4 + x^3 & \Rightarrow & f'(x) = 4x^3 + 3x^2 \\ f(x) = x^6 - x^4 & \Rightarrow & f'(x) = 6x^5 - 4x^3 \end{array}$$

15.1.3 Die Faktorregel

Besteht eine Funktion aus einem Term, der mit einer **Zahl** multipliziert wird, dann braucht diese Zahl bei der Ableitung nicht berücksichtigt zu werden:

> Hat eine Funktion die Form
>
> $$f(x) = c \cdot f_1(x)$$
>
> wobei 'c' eine Zahl ist, dann gilt:
>
> $$f'(x) = c \cdot f_1'(x)$$

Und nun auch für diese Regel ein paar Beispiele:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = 2x^2 & \Rightarrow & f'(x) = 2 \cdot 2x = 4x \\ f(x) = 3x^5 & \Rightarrow & f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4 \\ f(x) = -2x^7 & \Rightarrow & f'(x) = -2 \cdot 7x^6 = -14x^6 \end{array}$$

15.1.4 Die einfachen Regeln zusammen

Wendet man alle die bisher benannten Regeln an, dann lassen sich zum Beispiel ganzrationale Funktionen schon ableiten. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden und jeweils benannt werden, welche Regel zur Anwendung kommt. Das ist in der Regel nicht notwendig, üblicherweise wird zu einer ganzrationalen Funktion direkt ihre Ableitungsfunktion angegeben; es dient nur der Verdeutlichung.
Die Funktion, die als Beispiel abgeleitet werden soll, ist: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$. Um die Anwendung der verschiedenen Regeln verdeutlichen zu können, werden allerdings alle Potenzen ausgeschrieben, also: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x^1 - 7x^0$. Die Regeln werden folgendermaßen abgekürzt: [PR] Potenzregel, [SR] Summenregel, [FR] Faktorregel.

$$\begin{array}{rcll} [x^3 - 3x^2 + 5x^1 - 7x^0]' & = & [x^3]' - [3x^2]' + [5x^1]' - [7x^0]' & \text{[SR]} \\ & = & [x^3]' - 3[x^2]' + 5[x^1]' - 7[x^0]' & \text{[FR]} \\ & = & 3x^2 - 3 \cdot 2x^1 + 5 \cdot 1x^0 - 7 \cdot 0x^{-1} & \text{[PR]} \\ & = & 3x^2 - 6x^1 + 5x^0 - 0 & \\ & = & 3x^2 - 6x + 5 & \end{array}$$

Hier wirkt sich der erste Sonderfall aus, der bei der obigen Potenzregel angesprochen wurde. Eine Zahl, die alleine im Funktionsterm steht, wie im obigen Beispiel die '-7', 'fällt weg', wenn man die Funktion ableitet.

Aufgaben

A93. Gib die Ableitungsfunktionen zu den folgenden Funktionen an.

a)	$f(x) = x^5$	b)	$f(x) = x^{10}$
c)	$f(x) = x^3 + x^2$	d)	$f(x) = x^5 - x^3 + x$
e)	$f(x) = x^2 - 3x + 5$	f)	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 12$

15.2 Einige besondere Ableitungsfunktionen

Für manche Funktionen lässt sich die Ableitungsfunktion nicht so einfach bestimmen. Da bei manchen dieser Funktionen aber auch in der Schule die Ableitungsfunktion notwendig ist, sollen sie hier angeführt werden.

15.2.1 Die Ableitung der e- und Logarithmusfunktion

Die Ableitungsfunktion der Funktion

$$f(x) = e^x$$

ist

$$f'(x) = e^x$$

Sie ist die einzige Funktion, die gleich ihrer Ableitungsfunktion ist.

Auch die Umkehrfunktion zur e-Funktion hat ihre eigene Ableitungsfunktion:

Ist

$$f(x) = \ln(x)$$

dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

15.2.2 Die trigonometrischen Funktionen

Bei den trigonometrischen Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

15.3 Die weiteren Regeln

Auch wenn die weiteren Regeln zumeist nur im Leistungskurs Verwendung finden[2], sollte man auch dann, wenn man in einem Grundkurs sitzt diese kennen. Insbesondere die sogenannte Kettenregel kann sehr nützlich sein.

[2] Und nicht mal da werden alle Regeln wirklichgebraucht!

15.3.1 Die Produktregel

Ist der Funktionsterm einer Funktion ein Produktterm dessen Faktoren jeweils ein 'x' enthalten[3], dann gilt:

> Hat eine Funktion die Form:
>
> $$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
>
> dann ist ihre Ableitungsfunktion:
>
> $$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Diese Regel kommt vor allem bei den sogenannten zusammengesetzten Funktionen vor. Ist etwa

$$f(x) = (x^2 + 4x - 7)e^x$$

dann besteht der Funktionsterm aus zwei Faktoren. Diese müssen einzeln abgeleitet werden:

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 + 4x - 7 & u'(x) = 2x + 4 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}$$

Nun kann die Ableitungsfunktion der ursprünglichen Funktion bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x - 7)e^x \\ &= e^x(2x + 4 + x^2 + 4x - 7) \\ &= e^x(x^2 + 6x - 3) \end{aligned}$$

Gerade bei Funktionen, die mit der e-Funktion zusammen gesetzt sind, kommt es oft vor, dass der Term 'e^x' ausgeklammert werden kann und so die Ableitungsfunktion in einer zusammen gefassten Form dargestellt werden kann.
Da die Ableitungsfunktion der e-Funktion wieder die e-Funktion ist, soll nun noch ein anderes Beispiel angeführt werden, bei dem die Anwendung der Regel deutlicher wird.

$$f(x) = (x^3 - 2x^2)\sin(x)$$

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^3 - 2x^2 & u'(x) = 3x^2 - 4x \\ v(x) = \sin(x) & v'(x) = \cos(x) \end{array}$$

$$f'(x) = (3x^2 - 4x)\sin(x) + (x^3 - 2x^2)\cos(x)$$

Aufgaben

A94. Gib die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen an

a)	$f(x) = x \cdot e^x$	b)	$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$
c)	$f(x) = x \cdot \cos(x)$	d)	$f(x) = (x^2 - 5x + 3)\sin(x)$

15.3.2 Quotientenregel

Die Quotientenregel kommt in der Schule praktisch gar nicht mehr zur Anwendung und wird daher hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

> Hat eine Funktion die Form
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
>
> dann ist ihre Ableitungsfunktion:
>
> $$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

[3] Also nicht nur aus einer Zahl bestehen.

15.3.3 Die Kettenregel

Während die Produkt- und die Quotienteregel zur Anwendung kommt, wenn der Funktionsterm es 'vorschreibt'[4], ist die Sache bei der Kettenregel nicht ganz so einfach. Hier ist zunächst einmal zu klären, was denn überhaupt eine verkettete Funktion ist.

15.3.3.1 Verkettung von Funktionen

Die Verkettung von Funktionen zu einer 'Gesamtfunktion' ist nichts, was dem Funktionsterm zukommt. Es ist vielmehr eine Interpretation der Berechnungen, die in der Funktion vorgenommen werden.
Wird bei der Berechnung eines Funktionsterms[5] zunächst ein Teil des Funktionsterms vollständig ausgerechnet und dieses 'Zwischenergebnis' dann noch einer weiteren Berechnung zugeführt, dann kann man das als Verkettung zweier Funktionen verstehen.
Der Teil des Funktionsterms, der dabei zuerst vollständig berechnet werden muss, kann dann **innere Funktion** genannt werden, während die abschließende Berechnung **äußere Funktion** genannt wird.
Betrachtet man etwa die Funktion: $f(x) = (x-3)^3$, dann muss zunächst der Ausdruck '$x - 3$' vollständig berechnet werden und dieses 'Zwischenergebnis' wird dann insgesamt zur dritten Potenz erhoben.
Hier ist '$i(x) = x - 3$' die innere Funktion, während $\ddot{a}(z) = z^3$ die äußere Funktion darstellt. Die Verwendung einer anderen Variablen für das Funktionsargument bei der äußeren Funktion empfiehlt sich, weil ja in der ursprünglichen Funktion diese Stelle durch die vollständige innere Funktion eingenommen wird.
Vielleicht wird der Zusammenhang zwischen innerer und äußerer Funktion noch deutlicher, wenn man den umgekehrten Weg beschreitet: Man sucht sich einfach zwei Funktionen aus und betrachtet diese dann als innere beziehungsweise äußere Funktion. Ein Beispiel:
Sind $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = \sin(x)$, dann kann man aus diesen beiden Funktionen zwei neue Funktionen 'basteln', indem man die eine als innere und die andere als äußere Funktion verwendet. Ist '$f(x)$' innere Funktion und '$g(x)$' äußere, dann ergibt sich als neue Funktion ('$n(x)$'):

$$n(x) = \sin(2x + 3)$$

Man kann das aber auch umgekehrt machen und '$g(x)$' als innere und '$f(x)$' als äußere Funktion hernehmen, dann ergibt sich:

$$n(x) = 2\sin(x) + 3$$

15.3.3.2 Die Regel

> Kann eine Funktion als Verkettung zweier Funktionen angesehen werden, zum Beispiel:
> $$f(x) = \ddot{a}(i(x))$$
> dann ist ihre Ableitungsfunktion:
> $$f'(x) = i'(x) \cdot \ddot{a}'(i(x))$$

Die Kettenregel ist ausgesprochen nützlich und soll daher an Beispielen verdeutlicht werden.
Bei der Funktion $f(x) = e^{x^2-3x}$ kann '$x^2 - 3x$' als innere Funktion verstanden werden und 'e^z' als äußere. Für die Ableitungsfunkion ergibt sich:

$$\begin{aligned} &i(x) = x^2 - 3x \qquad && i'(x) = 2x - 3 \\ &\ddot{a}(z) = e^z && \ddot{a}'(z) = e^z \\ &f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x} && \end{aligned}$$

Aber auch in viel einfacheren Fällen kann die Kettenregel sehr hilfreich sein. Betrachtet man etwa die Funktion $f(x) = (2x - 3)^7$ dann kann diese Funktion natürlich auch ohne die Kettenregel

[4] Nämlich dann, wenn der Funktionsterm ein Produktterm oder ein Quotiententerm ist.

[5] Genauer: Die Berechnung, die erforderlich ist, wenn der Funktionswert einer Funktion für ein bestimmtes Funktionsargument berechnet wird.

abgeleitet werden. Dazu ist es allerdings nötig, dass man den Funktionsterm erst einmal 'ausrechnet': $f(x) = 128x^7 - 1344x^6 + 6048x^5 \dots$ Das ist mühsam[6] und dank der Kettenregel auch unnötig. Mit der Kettenregel ist die Bestimmung der Ableitungsfunktion, denn es ist:

$$f(x) = (2x-3)^7$$

$$\begin{array}{ll} i(x) = 2x - 3 & i'(x) = 2 \\ \ddot{a}(z) = z^7 & \ddot{a}'(z) = 7z^6 \end{array}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 7(2x-3)^6 \quad = 14(2x-3)^6$$

Sicherlich der einfachere Weg!

Aufgaben

A95. Gib bei den folgenden Funktionen an, welcher Teil als innere und welcher als äußere Funktion angesehen werden kann.

a)	$f(x) = \sqrt{2x+3}$	b)	$f(x) = \sin(x^2)$
c)	$f(x) = e^{x^2-1}$	d)	$f(x) = e^{\sin(x)}$

A96. Gib die Ableitungsfunktionen der Funktionen der letzten Aufgabe an.
Als kleiner Tipp: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

[6] Und nicht wenige werden sich dabei verrechnen.

Keine Panik!

16 Die Ableitungsfunktionen

Wie eine Ableitungsfunktion bestimmt werden kann, war Gegenstand des letzten Kapitels. In diesem — kurzen — Kapitel sollen einige weitere Begriffe geklärt werden und dann auch die Bedeutung der Ableitungen eingegangen werden.

16.1 Höhere Ableitungen

Hat man von einer Funktion die Ableitungsfunktion bestimmt, dann könnte man ja auch auf die Idee kommen, diese Ableitungsfunktion noch einmal abzuleiten. Sie hat dann für die Ableitungsfunktion die gleiche Bedeutung, wie diese auf die ursprüngliche Funktion.

> Leitet man die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ein weiteres Mal ab, dann entsteht die sogenannte **2. Ableitung**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie mit zwei Strichen geschrieben und ausgesprochen wird (F-2-Strich).
>
> $$f(x) \longrightarrow f'(x) \longrightarrow f''(x)$$
>
> Leitet man auch noch die 2. Ableitungsfunktion ab, erhält man die **3. Ableitung** $f'''(x)$.
> Ab der vierten Ableitung wird die Anzahl der Ableitung in runde Klammern oberhalb des 'f's geschrieben, also für die vierte Ableitung etwa: $f^{(4)}(x)$.

Auch die höheren ABleitungen sollen einmal anhand eines Beispiels verdeutlicht werden, das sich vermutlich selber erklärt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 3x + 10 \\
f'(x) &= 5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 14x - 3 \\
f''(x) &= 20x^3 + 36x^2 - 12x + 14 \\
f'''(x) &= 60x^2 + 72x - 12 \\
f^{(4)}(x) &= 120x + 72 \\
f^{(5)}(x) &= 120
\end{aligned}$$

Die Ableitungsfunktionen scheinen von Ableitungsschritt zu Ableitungsschritt immer einfacher zu werden. Das ist allerdings eine besondere Eigenschaft der ganzrationalen Funktionen, die nicht zu verallgemeinern ist.

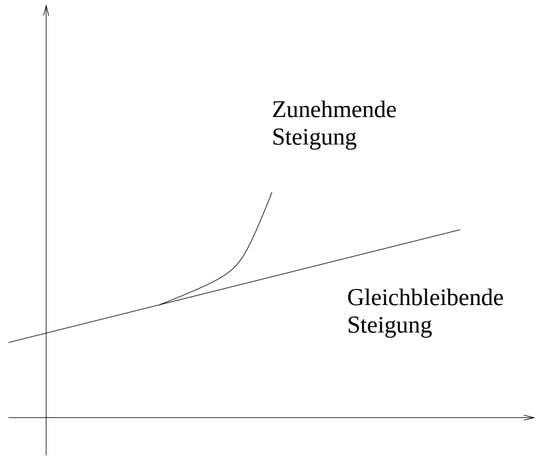
16.2 Die Bedeutung der Ableitungen

Über die Bedeutung der ersten Ableitung ist in den vergangenen Kapiteln schon einiges gesagt worden. Dabei sollte man sich aber klar machen, dass die Bedeutung dieser ersten Ableitung unterschiedliche Nuancen haben kann:

1. Die erste Ableitung gibt die Steigung der Tangente an den Punkt an, für den die Ableitung berechnet wurde.
   Das ist quasi die lementare Definition, man kann es aber auch anders sehen:
2. Die erste Ableitung gibt die 'Steigung' der ursprünglichen Funktion an diesem Punkt an.
   Der Begriff Steigung ist zwar für Geraden reserviert, aber dennoch lässt sich die Bedeutung übertragen, wenn man sich daran erinnert, dass die Erweiterung des Steigungsbegriffs ja gewissen Bedingungen unterlag.
   Weiterhin gilt:
   Ist die Ableitung größer als Null, dann steigt der Funktionsgraph bei diesem Punkt an.
   Ist die Ableitung kleiner als Null, dann sinkt er ab.
3. Man kann die Ableitung auch als Änderung der Funktionswerte verstehen. Ist die Ableitung größer als Null, dann werden die Funktionswerte bei dem untersuchten Punkt größer, ist sie kleiner als Null, dann werden sie kleiner.
   Dieser Zusammenhang wurde schon bei den durchschnittlichen und momentanen Änderungen besprochen.

Die erste Ableitung ergibt eine Aussage über die Monotonie der Funktion in der Nähe des untersuchten Punktes.
Ist $f'(x+0) > 0$, dann ist die Funktion **monoton steigend**.
Ist $f'(x+0) < 0$, dann ist die Funktion **monoton fallend**.

Was bedeutet dies nun für die zweite Ableitung? Rein formal ist klar, dass die zweite Ableitung die 'Steigung' der ersten Ableitung angibt. Das würde aber bedeuten, dass sie die 'Steigung' der 'Steigung' angibt — nicht sehr sinnvoll und vor allem nicht anschaulich.
Hier wird aber die oben genannte dritte '*Interpretation*' der ersten Ableitung interessant. Nimmt man diese Lesart, dann bedeutet die zweite Ableitung, dass sie die Änderung der 'Steigung' der ursprünglichen Funktion angibt, aber was heißt das?
Nehmen wir mal an, die zweite Ableitung wäre größer als Null. Dies würde dann bedeuten, dass die erste Ableitung im Bereich des untersuchten Punktes zunimmt, die 'Steigung' der ursprünglichen Funktion also auch zunimmt. Betrachten wir das einmal in einem Bild:



Eine Gerade hat immer die gleiche Steigung. Wenn also die 'Steigung' zunimmt, dann kann das nur bedeuten, dass die Linie gekrümmt ist. Und genau das ist der gesuchte Zusammenhang:

Die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ gibt deren Krümmung an.
Ist $f''(x) < 0$, dann ist der Funktionsgraph der Funktion an der Stelle **rechts gekrümmt**.
Ist $f''(x) > 0$, dann ist der Funktionsgraph der Funktion an der Stelle **links gekrümmt**.

16.3 Fachbegriffe

Höhere Ableitung

Unter einer höheren Ableitung versteht man die Ableitungsfunktion einer Ableitungsfunktion. Leitet man die (erste) Ableitungsfunktion ab, erhält man die 2. Ableitung, usw.

Krümmung

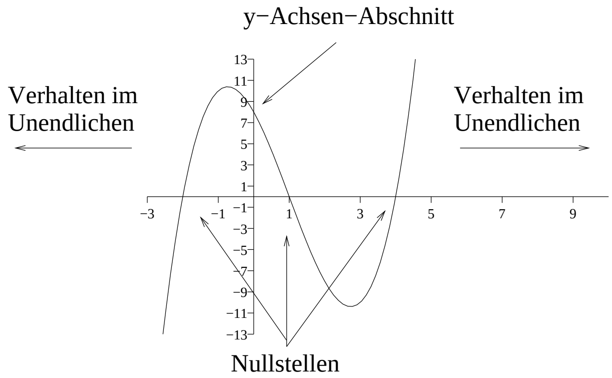
Ist ein Funktionsgraph keine Gerade, dann ist er gekrümmt. Man gibt die Krümmung dabei immer so an, als würde man auf den gezeichneten Graphen ein Spielzeugauto stellen und mit diesem den Graph nachfahren. Daraus ergeben sich Links- oder Rechtskurven.

Keine Panik!

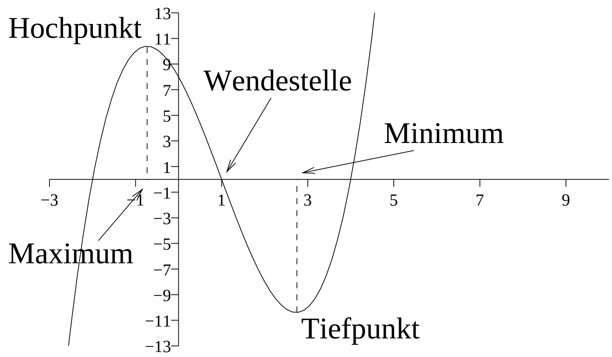
17 Extrem- und Wendestellen

17.1 Begriffsklärungen

Drei lange Kapitel waren nötig, um den Ableitungsbegriff zu erklären und zu erklären, wie man die Ableitung und die Ableitungsfunktionen bestimmen kann. Nun geht es um die Frage: Was macht man damit?
Zu diesem Zwecke sollte man sich noch einmal die grundsätzliche Aufgabe des Teilgebietes Analysis verdeutlichen. In der Analysis geht es darum aus einer Funktionsgleichung mÖglichst viele charakterisitsche Punkte oder Eigenschaften des Funktionsgraphen abzulesen. Bislang ist schon einiges in dieser Richtung geschehen:



Aber es gibt noch ein paar Punkte, die ebenfalls sehr charakteristisch sind und die bislang noch nicht behandelt wurden.



Im obigen Bild tauchen fünf Begriffe auf, die so noch nicht behandelt wurden. Diese sollen nun erst einmal genauer erklärt werden.

17.1.1 Maximum, Hochpunkt

Links von minus unendlich kommend, steigt der Funktionsgraph zunächst mal an, bis er bei ungef̈hr $x = -0,8$ einen höchsten Punkt erreicht, von dem aus es nach rechts wieder runter geht.
Der höchste Punkt, der dabei erreicht wird, heißt **Hochpunkt**. Interessiert nur der zugehörige x-Wert, dann nennt man diesen auch **Maximum** oder Maximalstelle[1].
Man mache sich allerdings klar, dass der Hochpunkt nicht der höchste Punkt des gesamten Funktionsgraphen ist. Rechts, ab der $x = 4$ steigt der Funktionsgraph bis ins Unendlich an. Allerdings sind in der Nähe des Hochpunktes alle Funktionswerte kleiner als an diesem Punkt.

> Ein **Hochpunkt** ist eine Stelle des Funktionsgraphen bei der alle Funktionswerte 'in der Nähe' kleiner sind, als eben im Hochpunkt.
> Der zugehörige x-Wert wird auch **Maximum** genannt.

[1] Diese Bezeichnungsweise ist ein bisschen willkürlich. Normalerweise werden Maximum und Hochpunkt nicht so deutlich unterschieden. Ich habe aber in der Vergangenheit oft die Erfahrung gemacht, dass meine hier vorgestellten Bedeutungen eigentlich ganz gut nutzbar sind.

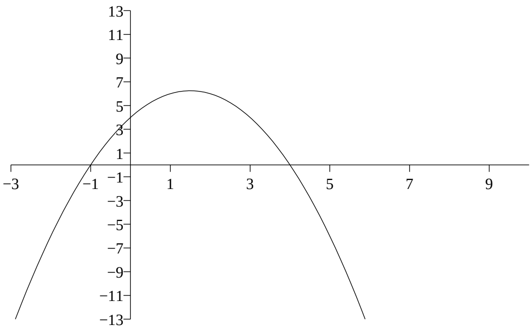
17.1.2 Tiefpunkt, Minimum

Vollkommen analog gibt es auch eine Stelle bei obbigem Funktionsgraphen, in deren Umgebung alle Funktionswerte größer sind, als eben an dieser Stelle. Ein solcher Punkt wird **Tiefpunkt** genannt. Sein x-Wert: **Minimum**.

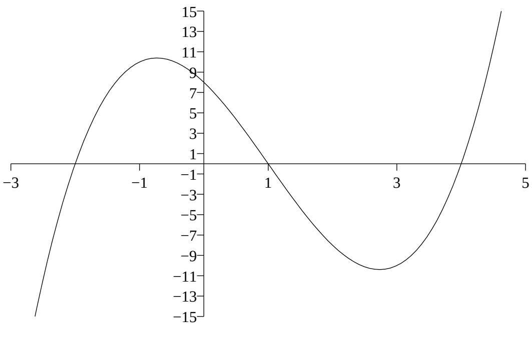
> Ein Tiefpunkt ist eine Stelle des Funktionsgraphen bei der alle Funktionswerte 'in der Nähe' größer sind, als eben im Tiefpunkt.
> Der zugehörige x-Wert wird **Minimum** genannt.

17.1.3 Genaueres zu den Extremstellen

Maxima und Minima werden unter dem Begriff **Extremstelle** zusammengefasst und beide Begriffe wurden gerade erklärt. Eine Kleinigkeit fehlt allerdings noch, die oben nur angedeutet werden konnte.
Bei dem Maximum[2] wurde schon darauf hingewiesen, dass es durchaus Punkte auf dem Beispielgraphen gibt, die höhere Funktionswerte aufweisen, als der y-Wert des Hochpunktes. Die Eigenschaft ein Hochpunkt zu sein, bezieht sich nur auf die Punkte des Funktionsgraphen in unmittelbarer Umgebung dieses Punktes.
Wenn der Funktionswert eines Maximums nicht der insgesamt höchste Funktionswert der Funktion ist, dann heißt dieses Maximum: **relatives Maximum**.
Betrachtet man allerdings folgenden Funktionsgraphen:



dann sieht die Sache anders aus. Auch diese Funktion hat ein Maximum und zwar an der Stelle $x = 1,5$. Hier ist aber die Maximalstelle nicht nur in ihrer Umgebung der höchste Punkt, die Funktion hat auch sonst keinen Punkt der höher liegt. Dann heißt das Maximum: **absolutes Maximum**.
Und noch eine Situation kann auftreten, wenn der Definitionsbereich einer Funktion begrenzt ist[3]. Stellt man sich bei dem folgenden Funktionsgraphen vor, dass der Definitionsbereich auf den Zahlbereich zwischen -3 und 5 begrenzt ist. Dann liegt das (relative) Maximum immer noch bei $x \approx -1$, das absolute Maximum aber am rechten Rand, also bei $x = 5$, denn dort wird der insgesamt größte Funktionswert innerhalb des Definitionsbereichs erreicht.



Die Unterscheidung zwischen relativen und absoluten Extremstellen ist in aller Regel nicht sonderlich entscheidend. Die Situation, dass am Rande des Definitionsbereichs maximale oder minimale

[2] Alles, was hier nun gesagt wird, gilt analog auch für die Minima.
[3] Zumeist aufgrund des Sachzusammenhangs.

Funktionswerte gefunden werden können, soll in einem Abschnitt über Aufgaben im Sachzusammenhang noch einmal genauer erklärt werden.

17.1.4 Wendestelle

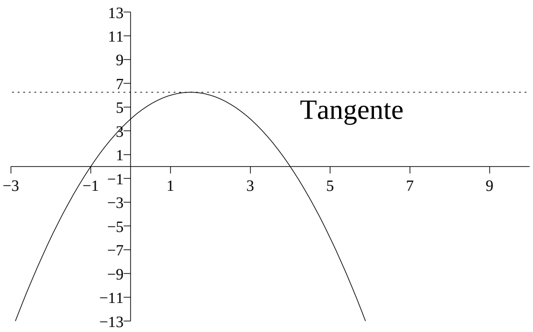
Aber es gibt noch einen interessanten Punkt beim obigen Funktionsgraphen. Von links kommend beschreibt der Graph zunächst eine Linkskurve. Aber $x = 1$ ändert sich dieses Verhalten aber und aus dem Graphen wird eine Rechtskurve.

> Bei einem Wendepunkt ändert ein Funktionsgraph sein Krümmungsverhalten von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt.

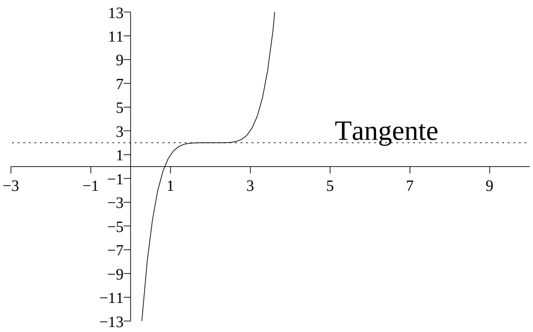
17.2 Zur Berechnung von Extremstellen

17.2.1 Zwei Bedingungen

Will man die Position eines Maximums oder Minimums berechnen, dann muss zuerst die Frage gestellt und beantwortet werden, was diese Stellen denn so besonders macht und man erkennt leicht, dass diese Stellen die einzigen sind, bei denen der Funktionsgraph eine waagerechte Tangente hat.



Nun gibt es allerdings auch Funktionen, deren Graph eine waagerechte Tangente hat an Stellen, die **keine** Extremstellen sind, wie das folgende Bild zeigt:



Einen solchen Punkt, wie er in der letzten Darstellung gezeigt wurde, nennt man übrigens **Sattelpunkt**.
Man kann also zusammenfassend sagen:

> **Überall** wo eine Funktion eine Extremstelle hat, hat sie auch eine waagerechte Tangente, aber **nicht überall** wo die Funktion eine waagerechte Tangente hat, hat sie auch eine Extremstelle!

Will man also eine Extremstelle finden, dann sind zwei Schritte nötig:

1. Man muss all die Stellen identifizieren, an denen die Funktion eine waagerechte Tangente hat, und
2. dann untersuchen, ob es sich wirklich um eine Extremstelle handelt, oder etwa um eine Stelle, wie sie im letzten Bild dargestellt wurde.

Die erste Bedingung, oder den ersten Schritt nennt man: **Notwendige Bedingung**, den zweiten **Hinreichende Bedingung**.

17.2.2 Die notwendige Bedingung

Die erste Bedingung, die eine Funktion oder ihr Graph bei einer Extremstelle erfüllen muss, ist, dass sie an der Stelle eine waagerechte Tangente haben muss.

Waagerechte Geraden, und eine Tangente ist eine Gerade, haben die Steigung Null. Die Steigung der Tangenten ist die Ableitung, also gilt die notwendige Bedingung, dass

$$f'(x) = 0$$

sein muss. Da ja mittlerweile klar ist, dass die Ableitung auch mit einer Ableitungsfunktion bestimmt werden kann, können Extremstellen nur an den Nullstellen der Ableitungsfunktion liegen.

17.2.3 Die hinreichende Bedingung

Für die Kontrolle der zweiten, der hinreichenden Bedingung, gibt es zwei Möglichkeiten, die beide ihre Vor- und Nachteile haben.

17.2.3.1 Die Krümmung

Betrachtet man noch einmal die letzten beiden Abbildungen, dann stellt man fest, dass bei der ersten Abbildung, die ja ein Maximum zeigt, der Funktionsgraph durchgehend rechts gekrümmt ist. Bei der folgenden Abbildung geht der Frunktionsgraph an der Stelle, wo er eine waagerechte Tangente hat, von einer Rechts- in eine Linkskrümmung über, hat aber in dem Punkt, an dem die waagerechte Tangente angelegt werden kann, **keine** Krümmung.

Die Krümmung wird durch die 2. Ableitung beschrieben. Bei einem Maximum muss der Funktionsgraph rechts gekrümmt sein[4], also muss dort gelten: $f''(x) < 0$. Bei einem Minimum muss der Funktionsgraph links gekrümmt sein, also $f''(x) > 0$ sein. Damit gilt:

Soll eine Funktion an einer Stelle $x = x_0$ eine Extremstelle haben, dann muss:

1. $f'(x_0) = 0$ sein (notwendige Bedingung)

und darüber hinaus muss

2. der Graph gekrümmt sein.
   Ist $f''(x_0) < 0$, dann hat die Funktion bei x_0 ein **Maximum**,
   ist $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion bei x_0 ein **Minimum**.

Bedauerlicherweise gibt es Funktionen, bei denen an den Stellen, an denen $f'(x) = 0$ ist auch $f''(x) = 0$ ist, so dass dann immer noch nicht unterschieden werden kann, ob es sich um einen Extrempunkt oder einen Sattelpunkt handelt. In einem solchen Fall sollte ein anderes hinreichendes Kriterium angewendet werden, der Vorzeichenwechsel oder das Vorzeichenwechselkriterium.

17.2.3.2 Der Vorzeichenwechsel

Betrachtet man die beiden letzten Darstellungen, dann fällt auf, dass bei dem Maximum (vorletzte Darstellung), der Funktionsgraph links vom Maximum ansteigt ($f'(x) > 0$), während er rechts davon abfällt ($f'(x) < 0$).

Beim Sattelpunkt (letzte Darstellung) ist das anders. Hier steigt der Funktionsgraph links und rechts von der Stelle mit der waagerechten Tangente an (beide Male $f'(x) > 0$).

Auch diesen Unterschied kann man in ein Verfahren fassen:

[4] Man sollte sich das klar machen!

Hat eine Funktion bei $x = x_0$ eine waagerechte Tangente, dann müssen zwei Werte für 'x' gefunden werden, die einmal links von x_0 liegen: 'x_l' und einmal rechts von x_0: 'x_r'. Gilt nun:

1. Bei $x = x_0$ gilt: $f'(x_0) = 0$

und darüber hinaus

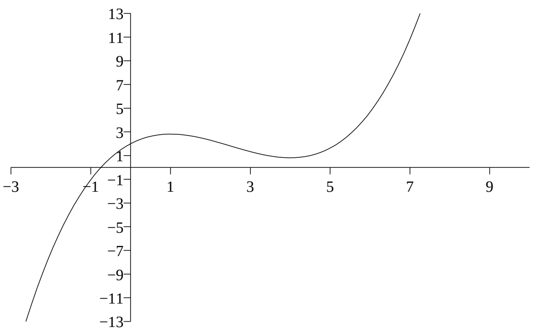
2. Ist $f'(x_l) < 0$ und $f'(x_r) > 0$, dann hat die Funktion bei $x = x_0$ ein Minumum.
   Ist $f'(x_l) > 0$ und $f'(x_r) < 0$, dann hat die Funktion bei $x = x_0$ ein Maximum.

   Ist $f'(x_l) < 0$ **und** $f'(x_r) < 0$ oder $f'(x_l) > 0$ **und** $f'(x_r) > 0$, dann hat die Funktion bei $x = x_0$ einen Sattelpunkt.

17.2.4 Ein konkretes Beispiel

Bis hierhin war das alles recht theoretisch. Nun sollen einmal die Extremstellen einer Funktion wirklich berechnet werden. Das Verfahren hat insgesamt drei Schritte[5].
Die Funktion, die auf Extremstellen hin untersucht werden soll, ist die Funktion[6]:

$$f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{59}{27}$$



17.2.4.1 Die notwendige Bedingung

Zunächst muss in jedem Fall die notwendige Bedingung geprüft werden. Diese lautet: $f'(x) = 0$. Dazu muss also erst mal die erste Ableitungsfunktion bestimmt werden:

$$f'(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{16}{9}$$

Setzt man diese Ableitungsfunktion gleich Null, um die Nullstellen dieser Ableitungsfunktion zu bestimmen, erhält man leicht: $x = 1$ oder $x = 4$.
An diesen Stellen hat also die Funktion $f(x)$ eine waagerechte Tangente, es könnte dort eine Extremstelle liegen[7]

17.2.4.2 Die hinreichende Bedinung

Mit der zweiten Ableitung

Für die Überprüfung dieser Bedingung muss zunächst die 2. Ableitung berechnet werden. Diese ist:

$$f''(x) = \frac{8}{9}x - \frac{20}{9}$$

[5] Der dritte Schritt wurde bisher noch nicht angesprochen, wird aber gleich erklärt und ist eigentlich auch ganz einfach.

[6] Lass dich nicht von den 'krummen' Zahlen im Funktionsterm abschrecken, die werden gleich einfacher!

[7] Noch mal: Bis hier ist nicht klar, **ob** dort überhaupt eine Extremstelle liegt und erst recht nicht, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt!

Setzt man nun zunächst $x = 1$ in diese 2. Ableitung ein, erhält man:

$$\begin{aligned} f''(1) &= \frac{8}{9} \cdot 1 - \frac{20}{9} \\ &= \frac{8}{9} - \frac{20}{9} \\ &= -\frac{12}{9} < 0 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ ist kleiner als Null, die Funktion muss also bei $x - 1$ ein Maximum haben.
Nun noch die Stelle $x = 4$. Hier ergibt sich:

$$\begin{aligned} f''(4) &= \frac{8}{9} \cdot 4 - \frac{20}{9} \\ &= \frac{32}{9} - \frac{20}{9} \\ &= \frac{12}{9} > 0 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist bei $x = 4$ größer als Null, also muss die Funktion dort ein Minimum haben.

Mit dem Vorzeichenwechsel

Bei $x = 1$ hat die Funktion $f(x)$ die erste Ableitung Null. Links davon liegt etwa $x = 0$ und rechts davon $x = 2$. Nun gilt allerdings:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{4}{9} \cdot 0^2 - \frac{20}{9} \cdot 0 + \frac{16}{9} \\ &= 0 - 0 + \frac{16}{9} > 0 \\ f'(2) &= \frac{4}{9} \cdot 2^2 - \frac{20}{9} \cdot 2 + \frac{16}{9} \\ &= \frac{4}{9} \cdot 4 - \frac{20}{9} \cdot 2 + \frac{16}{9} \\ &= \frac{16}{9} - \frac{40}{9} + \frac{16}{9} \\ &= -\frac{8}{9} < 0 \end{aligned}$$

Links von der $x = 1$ steigt der Funktionsgraph also an und rechts davon sinkt er ab, die Funktion muss bei $x = 1$ ein Maximum haben.
Für $x = 4$ findet man die Stellen $x = 2$ und $x = 5$ rechts und links der zu untersuchenden Stelle. Es ist schon bekannt, dass $f'(2) = -\frac{8}{9} < 0$. Weiter ist: $f'(5) = \frac{16}{9} > 0$.
Links von $x = 4$ fällt der Funktionsgraph also ab, rechts davon steigt er an, die Funktion muss bei $x = 4$ ein Minimum haben.

Auswahl der hinreichenden Bedingung

Oben wurden beide Verfahren zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung vorgestellt. Welches dieser beiden Verfahren man wählt ist weitgehend jedem selbst überlassen (wenn die Aufgabenstellung nichts anderes vorschreibt!). In der Praxis hat sich allerdings folgende Vorgehensweise bewährt:
Zunächst sollte man die hinreichende Bedingung mit der 2. Ableitung versuchen. Sollte sich heraus stellen, dass auch $f''(x)$ an der zu untersuchenden Stelle gleich Null ist, dann kann das Vorzeichenwechselkriterium angewendet werden.

17.2.4.3 Die fehlenden Werte

Oben wurde schon darauf hingewiesen, dass noch ein dritter Schritt nötig ist. Dieser erklärt sich nahezu von alleine. Bislang ist bekannt, dass die Funktion $f(x)$ bei $x = 1$ ein Maximum und bei $x = 4$ ein Minimum hat. Was allerdings noch nicht klar ist, ist wo denn der zugehörige Hoch- beziehungsweise Tiefpunkt liegt, da von diesen die y-Werte noch nicht bekannt sind. Diese können allerdings leicht ausgerechnet werden, indem man die gefunden Werte $x = 1$ und $x = 4$ in die ursprüngliche Funktion einsetzt. Es ist:

$$f(1) = 3$$

Der Hochpunkt liegt also bei den Koordinaten: $HP(1/3)$.
Weiterhin ist

$$f(4) = 1$$

und damit liegt der Tiefpunkt bei $TP(4/1)$.

17.2.4.4 Zusammenfassung

> Um die Extremstellen einer Funktion zu bestimmen, muss man:
>
> 1. Prüfen, wo die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllt ist.
> 2. Mit einer der hinreichenden Bedingungen (Krümmung oder Vorzeichenwechsel) prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt.
> 3. Bei den gefundenen x-Werten der Extremstellen noch die zugehörigen y-Werte berechnen, um die genaue Lage von Hoch- und Tiefpunkten zu erfahren.

Aufgaben

A97. Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = -x^2 + 2x$	b)	$f(x) = x^2 - 6x + 8$
c)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	d)	$f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$
e)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$	f)	$f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$
g)	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	h)	$f(x) = -x^4 + 1,04x^2 - 0,04$

17.3 Zur Berechnung von Wendestellen

Bei den Bedeutungen der Ableitungsfunktionen wurde schon darauf hingewiesen, dass die 2. ABleitung für die 1. Ableitung die gleiche Bedeutung hat, wie die 1. Ableitung für die ursprüngliche Funktion. Denkt man diesen Zusammenhang weiter, dann ergibt sich sehr einfach:

> Um die Wendestellen einer Funktion zu bestimmen, muss man:
>
> 1. Prüfen, wo die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ erfüllt ist.
> 2. Mit einer hinreichenden Bedingung prüfen, ob wirklich eine Wendestelle vorliegt.
> 3. Bei den gefundenen x-Werten der Wendestellen noch die zugehörigen y-Werte berechnen, um die genaue Lage der Wendestellen zu erfahren.

Insbesondere ist bei einem Wendepunkt von einer Linkskrümmung zu einer Rechtskrümmung die Steigung der ursprünglichen Funktion maximal, die erste Ableitung hat also dort ein Maximum. Analog ist die Steigung bei einem Wechseln von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung minimal. Dieser Umstand wird in Abituraufgaben sehr gerne genutzt.
Das Verfahren ist also absolut gleich zu dem bei der Bestimmung der Extremstellen, nur eine 'Ableitungsstufe' weiter. Wo bei den Extremstellen die 1. Ableitung erforderlich war (notwendige Bedingung), ist hier die 2. Ableitung gefragt. Wo bei den Extremstellen die 2. Ableitung gefragt war (hinreichende Bedingung) ist hier die 3. Ableitung gefragt.

17.3.1 Ein konkretes Beispiel

Gesucht werden sollen die Wendestellen der Funktion:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

17.3.1.1 Die notwendige Bedingung

Als notwendige Bedingung muss $f''(x) = 0$ erfüllt sein. Dazu muss also erst mal die 2. Ableitung bestimmt werden:

$$f'(x) = 4x^3 - 10x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 10$$

Setzt man die zweite Ableitung gleich Null, wegeben sich die Lösungen: $x \approx -0,91$ und $x \approx 0,91$.

17.3.1.2 Die hinreichende Bedingung

Mit der 3. Ableitung

Es ist: $f'''(x) = 24x$ und daher leicht zu sehen, dass $f'''(-0,91) \approx -21,84 < 0$. Hier hat also die Steigung der Funktion ein Maximum, daher muss es sich um einen Links-Rechts-Wendepunkt handeln.
Weiter ist $f'''(0,91) \approx 21,84 > 0$, die Steigung hat also ein Minimum, was nichts anderes bedeutet, als dass die Funktion dort einen Rechts-Links-Wendepunkt haben muss.

Mit Vorzeichenwechsel

Für $x = -0,91$ bieten sich die Werte $x = -1$ und $x = 0$ an. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 12 \cdot (-1)^2 - 10 \\ &= 12 \cdot 1 - 10 \\ &= 12 - 10 \\ &= 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 10 \\ &= 0 - 10 \\ &= -10 < 0 \end{aligned}$$

Links von der $x = -0,91$ ist der Graph also links- und rechts davon rechtsgekrümmt, es liegt eine Wendepunkt vor.
Für $x = 0,91$ bieten sich $x = 0$ und $x = 1$ an. Hier ist: $f''(0) = -10$ (rechtsgekrümmt) und $f''(1) = 2$ (linksgekrümmt). Auch hier liegt ein Wendepunkt vor.

17.3.1.3 Die fehlenden Werte

Um nun noch die genaue Lage der Wendestellen zu ermitteln, müssen noch die y-Werte bestimmt werden.
Es ist $f(-0,91) \approx 0,55$ und $f(0,91) \approx 0,55$, woraus folgt, dass die Funktion die beiden Wendestellen: $WP_1(-0,91/0,55)$ und $WP_2(0,91/0,55)$ hat.

Aufgaben

A98. Bestimme die Wendepunkte der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	b)	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$
c)	$f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$	d)	$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

17.4 Fachbegriffe

Extremstelle
Maxima und Minima einer Funktion werden unter dem Begriff **Extremstelle** zusammen gefasst.

Hochpunkt
Ein Hochpunkt ist ein Punkt eines Funktionsgraphen, bei dem alle anderen Punkte in der Nähe kleinere Funktionswerte haben.

Maximum
Ein Maximum ist der x-Wert eines Hochpunktes.

Minimum
Ein Minumum ist die x-Wert eines Tiefpunkts.

Sattelpunkt
Ein Sattelpunkt ist ein Punkt auf einem Funktionsgraphen, der eine waagerechte Tangente hat, ohne dabei ein Hoch- oder Tiefpunkt zu sein. Ein Sattelpunkt ist daher immer auch ein Wendepunkt.

Tiefpunkt
Ein Tiefpunkt ist ein Punkt eines Funktionsgraphen, bei dem allen anderen Punkte in der Nähe größere Funktinswerte haben.

Vorzeichenwechselkriterium
Ist eines der möglichen hinreichenden Kriterien, die bei der Ermittlung von Extrem- oder Wendestellen erforderlich ist.

Wendestelle
Bei einer Wendestelle ändert sich das Krümmungsverhalten eines Funktionsgraphen. Bei ihr geht er von einer Rechts- in eine Linkskrümmung über, oder umgekehrt.

Keine Panik!

18 Kurvendiskussion

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass es bei der Analysis vornehmlich darum geht aus einer Funktionsgleichung so viele wie mögliche Informationen über den Verlauf des Funktionsgraphen heraus zu bekommen, einen möglichst gutenÜberblick über den Verlauf des Graphen zu bekommen. Alle bisher in diesem Teil vorgestellten Schritte dienten nur diesem Ziel und das soll nun in diesem Kapitel vorgestellt werden.
Da es in diesem Kapitel keine neuen Inhalte gibt, sondern nur die der vergangenen Kapitel und Abschnitte zu einem Ganzen zusammenführt, soll ein Beispiel für eine Kurvendiskussion reichen.
Diskutiert werden soll die Funktion:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

18.1 Definitions- und Wertemenge

Da es sich um eine ganzrationale Funktion handelt, können alle Zahlen in die Funktion eingesetzt werden, es ist also:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Da die Funktion weiterhin einen ungeraden Grad hat, ist auch schon klar, dass sie von Minus Unendlich nach plus Unendlich, oder umgekehrt, verläuft[1]. Daher gilt auch für den Wertebereich:

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

18.2 Symmetrie

Die Exponenten der Funktion sind ausschließlich ungerade Zahlen, daher ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

18.3 Verhalten im Unendlichen

Der höchste Exponent der Funktion ist 3, also ungerade. Die höchste Potenz wird mit 1, also einer positiven Zahl, multipliziert. Daher ergibt sich:

$$f(x) \to -\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty \qquad \text{und} \qquad f(x) \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

18.4 y-Achsen-Abschnitt

Wie bei allen ganzrationalen Funktionen gibt die Zahl 'ohne x' den y-Achsen-Abschnitt an. Dieser ist hier Null, außerdem ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, was bedeutet, dass der Funktionsgraph durch den Ursprung gehen muss.
Der y-Achsen-Abschnitt ist also Null!

18.5 Nullstellen

Um die Nullstellen zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 9x \\ &= x(x^2 - 9) \end{aligned}$$

Damit ist $x = 0$ die erste Nullstelle. Die Gleichung: $x^2 - 9 = 0$ hat weiterhin die Lösungen $x = -3$ und $x = 3$. Damit hat die Funktion die Nullstellen

$$x = -3 \qquad x = 0 \qquad x = 3$$

[1] Genaueres bei der Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen.

18.6 Ableitungen

Für die Extrem- und Wendestellen der Funktion werden die Ableitungen gebraucht. Es ist daher sinnvoll schon einmal hier alle Ableitungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x \\ f'(x) &= 3x^2 - 9 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

18.7 Extremstellen

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ist $f'(x) = 0$. Diese Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 9 \\ 9 &= 3x^2 \\ 3 &= x^2 \\ \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,732 &= x \end{aligned}$$

Aufgrund der Punktsymmetrie muss nur eine der möglichen Stellen weiter untersucht werden, die andere ergibt sichdann automatisch.
Für die hinreichende Bedingung wird an einer der Stellen, für die gilt, dass $f'(x) = 0$ ist, untersucht, welchen Wert die zweite Ableitung hat.

$$\begin{aligned} f''(\sqrt{3}) &= 6 \cdot \sqrt{3} \\ &\approx 5,20 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion muss also bei $x = \sqrt{3}$ ein Minimum und wegen der Symmetrie bei $x = -\sqrt{3}$ ein Maximum haben.
Es bleibt noch die y-Werte der Extremstellen zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}^3 - 9\sqrt{3} \\ &\approx -10,39 \end{aligned}$$

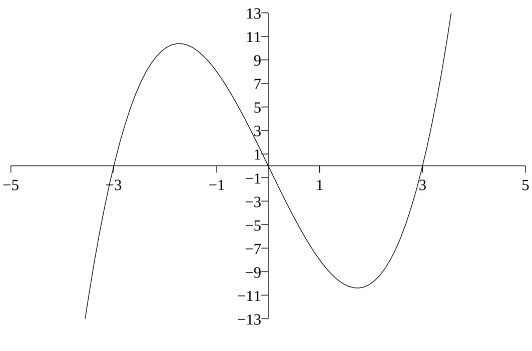
Damit ist klar, dass die Funktion bei $HP(-\sqrt{3}/10,39)$ einen Hochpunkt und bei $TP(\sqrt{3}/-10,39)$ einen Tiefpunkt hat.

18.8 Wendestellen

Hier ist zunächst eine Stelle zu finden, bei der $f''(x) = 0$ (notwendige Bedingung). Dies ist offensichtlich bei $x = 0$ der Fall.
Die dritte Ableitung ist immer ungleich Null, weshalb die hinreichende Bedingung automatisch erf—"ult ist.
Weiterhin ist bekannt, dass bei $x = 0$ eine Nullstelle liegt und damit ist der einzige Wendepunkt der Punkt $WP(0/0)$.

18.9 Graph

Nun sind alle Punkte einer Kurvendiskussion abgearbeitet. Es ist sicherlich sinnvoll nun den Graphen einmal genau mit den Ergebnissen zu vergleichen:

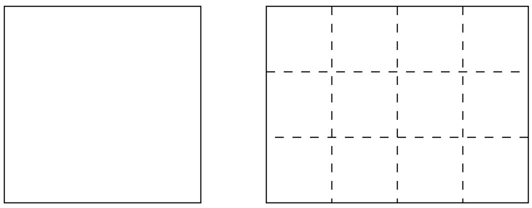


Keine Panik!

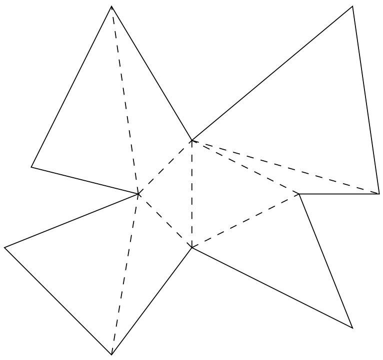
19 Integralrechnung

19.1 Historischer Zusammenhang

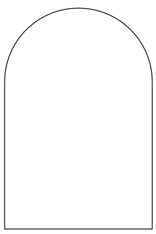
Die Entstehung der Integralrechnung lässt sich in die Flächenberechnung ebener geometrischer Figuren einordnen.
In der europäischen Mathematik lässt sich eine klare Entwicklung von der Geometrie (vorwiegend klassisches Griechenland) zur Arithmetik (Berechnung mit Zahlen) feststellen. Während früher etwa Rechtecke in gleichgroße Quadrate per **Konstruktion** umgewandelt wurden (und auch wieder zurück), konnte dies schon sehr früh auch durch Berechnung geschehen.
Die erste und einfachste Figur war dabei das Quadrat und mit ihm das Rechteck, das sich in Quadrate einteilen lässt..



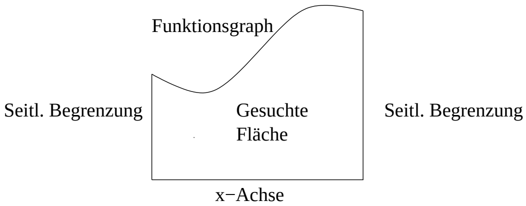
Über das Parallelogramm ließ sich dann auch die Fläche des Dreiecks berechnen.
Weil sich nun aber jede geometrische Figur, die durch Strecken begrenzt ist, in Dreiecke zerlegen lässt, konnte damit jede ebene, gradlinig begrenzte Fläche berechnen.



Der nächste Schritt war dann die Möglichkeit auch Kreise und Kreisteile berechnen zu können. Damit ergab sich dann die Möglichkeit auch Figuren zu berechnen, deren Außenlinie (teilweise) eine Kreislinie war.



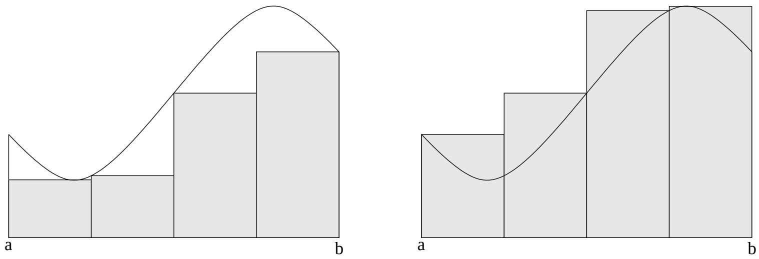
Nun gibt es aber auch geometrische Figuren, deren Außenlinie **keine** Gerade und auch **kein** Kreisteil ist, sondern eine irgendwie gekrümmte Linie, wobei angenommen werden kann, dass sich solche Linien durch Graphen von Funktionen darstellen lassen.
Die (ursprüngliche) Aufgabe der Integralrechnung war daher die Fläche einer Figur berechnen zu können, die an drei Seiten durch Geraden und an der vierten Seite durch einen Funktionsgraphen begrenzt ist.



Da praktisch je geometrische Figur, egal wie ihre Außenlinie aussieht, in solche Figuren unterteilt werden kann, wäre damit *de facto* die Fläche jeder geometrischen Figur berechenbar.

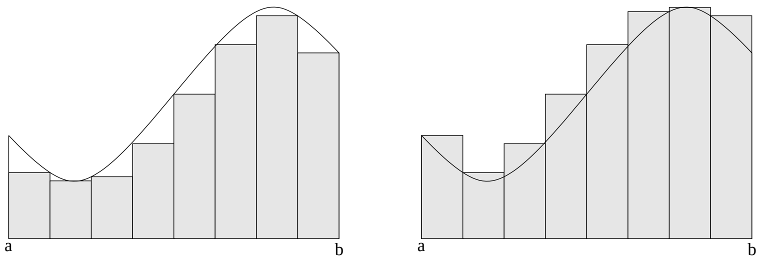
19.2 Vorgehensweise

Man kann eine Fläche, wie sie oben vorgestellt wurde, in Streifen 'zerschneiden' und in diese entweder Rechtecke[1] einzeichnen, die gerade vollständig **unterhalb** des Funktionsgraphen liegen, oder Rechtecke, die gerade **oberhalb** des Funktionsgraphen.



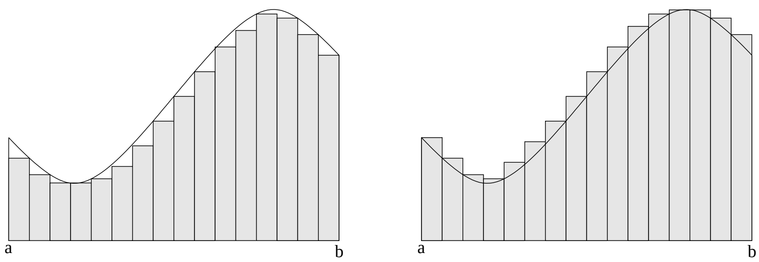
Rechtecke unter dem Graph   Rechtecke über dem Graph

Addiert man die Rechteckflächen, die alle unterhalb des Funktionsgraphen liegen, dann erhält man eine Fläche, die sicherlich **kleiner** ist, als die gesuchte Fläche. Diese addierte Fläche heißt **Untersumme**. Addiert man die Rechteckflächen, die alle den Funktionsgraphen umschließen, dann erhält man eine Fläche, die **größer** ist, als die gesuchte. Diese addierte Fläche nennt man **Obersumme**. Die gesuchte Fläche muss also zwischen diesen beiden Flächen liegen.
Um ein besseres Ergebnis zu erhalten kann man die Breite der Rechtecke verringern:



Rechtecke unter dem Graph   Rechtecke über dem Graph

Die nun entstehende Untersumme ist zwar immer noch kleiner als die gesuchte Fläche, aber auch größer als die vorherige Untersumme. Entsprechendes gilt für die Obersumme, so dass die gesuchte Fläche nun 'enger' eingegrenzt ist.
Dieses Verfahren lässt sich fortführen:



Rechtecke unter dem Graph   Rechtecke über dem Graph

und das Ergebnis wird immer 'besser'.

[1] Die sind ja berechenbar!

Um nun auch die Integralschreibweise verstehen zu können, soll dieses Verfahren ein bisschen formalisiert werden[2], dabei ist:

A die gesuchte Fläche.
U die Untersumme.
O die Obersumme.
Δx die Breite der 'Streifen'. Diese Bezeichnung ist historisch bedingt und soll hier nicht weiter erklärt werden.
f_{min} der kleineste Funktionswert innerhalb eines Streifens.
f_{max} der größte Funktionswert innerhalb eines Streifens.
$\sum\limits_a^b$ das Zeichen dafür, dass die Werte zwischen der linken Begrenzung 'a' und der rechten 'b' aufsummiert werden sollen.

Damit ist nun:

$$U = \sum_a^b f_{min} \cdot \Delta x \quad \leq \quad A \quad \leq \quad \sum_a^b f_{max} \cdot \Delta x = O$$

Nun komt noch eine Überlegung hinzu, die uns schon vom Begriff der Ableitung her bekannt ist. Bei der ersten Annäherung an diesen Begriff wurde zu einem untersuchenden Punkt ein zweiter gewählt und dann die Steigung der Sekanten durch diese beiden Punkte betrachtet. Der entscheidende Schritt dabei war, dass in der Vorstellung dieser gewählte Punkt 'immer näher' an den zu untersuchenden heranrücken sollte und man dabei betrachtete, was mit der Sekantensteigung passierte[3].
Diese gedankliche Überlegung wurde nun auf die jetzige Situation angewendet: Was geschieht mit Unter- und Obersumme, wenn man die 'Streifen' immer schmaler macht, eventuell so schmal, dass sie praktisch keine Breite mehr haben?
Offenkundig müssen sich die Ober- und die Untersumme immer mehr der gesuchten Fläche annähern und sie schließlich '*im Unendlichen* sogar erreichen.
Um kenntlich zu machen, dass diese dynamische Überlegung dahinter steckt, wurden die Bezeichnungen geändert:

dx ist die (unendlich) schmale Breite, die übrig bleibt, wenn $\Delta a \to 0$ geht.
$f(x)$ ist der Funktionswert an der Stelle des (unendlich) schmalen Streifens. Eine Unterscheidung in den größten und kleinsten ist dabei nicht mehr nötig, weil diese beiden Werte praktisch gleich werden.
$\int\limits_a^b$ die Bezeichnung für eine Summe aus unendlich vielen, unendlich schmalen 'Streifen'. Das Integralszeichen ($\int$) ist dabei an den Buchstaben 'S' angelehnt, der für 'Summe' steht.

und damit ergibt sich nun:

$$A = \int\limits_a^b f(x) \cdot dx$$

19.2.1 Vorsicht!

Man beachte, dass dieses Verfahren nur dann funktioniert, wenn der Funktionsgraph sich vollständig **oberhalb** der x-Achse befindet. Läge er darunter, dann wären die zugehörigen Funktionswerte negative Zahlen und bei der Multiplikation mit der 'Streifenbreite' ergäbe sich eine negative Fläche. Das mag nun noch nicht so schlimm sein, weil man ja beim Ergebnis nur das Vorzeichen ändern müsste. Aber wenn ein Teil der Funktionswerte positiv (der Funktionsgraph verläuft hier oberhalb der x-Achse) und ein anderer Teil negativ (da verläuft der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse) wäre, dann würden die positiven gegen die negativen Flächenwerte sich teilweise gegenseitig aufheben und das ganze Ergebnis zunichte machen.

---

[2] Die Beziechnungen muss man sich allerdings wirklich nicht merken, sie dienen ausschließlich zur Förderung des Verständnisses.

[3] Das war ein entscheidender Schritt in der Entwicklung der Mathematik. Man mache sich klar, dass damit eine statische Sichtweise auf Berechnungen verlassen und zugunsten einer dynamischen aufgegeben wurde.

19.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Begriff der Ableitung und der daraus resultierenden Ableitungsfunktionen konnte nur durch eine '*Dynamisierung*' der Betrachtungsweise gewonnen werden[4] und auch die Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen ist nur möglich durch eine solche '*dynamische*' Betrachtung der Zusammenhänge.
Den beiden bedeutenden Mathematikern *Isaac Newton*[5] und *Gottfried Wilhelm Leibnitz*.[6] gelang der Nachweis, dass zwischen diesen beiden, zunächst ja einmal sehr weit voneinander entfernten Themengebieten, noch ein weiterer Zusammenhang bestand, dass nämlich das Eine quasi die Umkehrung des Anderen war.

19.3.1 Die Stammfunktion

Hat man eine Funktion $f(x)$, dann kann man diese *ableiten* und erhält so die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$, wobei die Funktion $f(x)$ nur diese eine Ableitungsfunktion $f'(x)$ hat, die beiden also 'etwas miteinander zu tun' haben.
Der Zusammenhang dieser beiden Funktionen legt nahe, dass es auch '*irgendwie*' möglich sein müsste, den umgekehrten Weg zu beschreiten, also von der Ableitungsfunktion $f'(x)$ wieder zu der ursprünglichen Funktion $f(x)$ zu gelangen. Man könnte diesen Schritt mit 'Aufleitung' oder 'aufleiten' bezeichnen[7].
Ja sogar noch weiter. Wenn man dieses Verfahren auf die Funktion $f(x)$ anwendet, dann müsste sich eine Funktion ergeben, deren Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ist. Eine solche Funktion heißt: **Stammfunktion** und wird im Allgemeinen mit $F(x)$ bezeichnet.

> Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, wenn gilt:
> $$F'(x) = f(x)$$

Man mache sich klar, dass es **die** Stammfunktion nicht geben kann, sondern bestenfalls **eine** Stammfunktion. Um das zu verstehen soll ein konkretes Beispiel betrachtet werden:
Die Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist sicherlich Stammfunktion der Funktion $f(x) = x^2$, denn es gilt $F'(x) = f(x)$. Aber auch die Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ ist Stammfunktion von $f(x)$, denn auch hier gilt $F'(x) = f(x)$. Statt der '+1' könnte hier auch '+2', '+3' oder '+10' stehen, da ja eine einfache Zahl beim ableiten immer 'verschwindet'.

19.3.2 Der Satz

Der entscheidende Satz, mit dem nun die Flächen wirklich und einfach berechnet werden können und der von Newton und Leibnitz entdeckt wurde, lautet nun:

> Ein Integral über einer Funktion lässt sich berechnen zu:
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

So wie mit der Ableitungsfunktion ein Mittel gefunden wurde um Ableitungen einfach zu berechnen, wurde also mit der Stammfunktion ein Mittel gefunden, um Flächen einfach zu berechnen.

19.3.3 Die Schreibweise

Um zu kennzeichnen, dass eine Funktion abgeleitet werden soll, wird sie mit einem Strich versehen. Wie soll nun gekennzeichnet werden, dass eine Funktion *aufgeleitet* werden soll? Weil diese

---

[4] Indem man eben keine einzelnen Punkte mehr betrachtete, sondern sich vorstellte, dass einer der Punkte 'wanderte', also sich bewegte.

[5] Geboren am 25.12.1642 in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire, gestorben am 20.3.1726 in Kensington

[6] Geboren am 1.7.1646 in Leibzig, gestorben am 14.11.1716 in Hannover.

[7] Ein Begriff, den es offiziell zwar nicht gibt, der aber im Mathematikunterricht längst Eingang gefunden hat.

Frage im Zusammenhang mit der Berechnung von Flächen aufgetreten ist wird hier eine ähnliche Schreibweise angewendet:

$$F(x) + c = \int f(x)dx$$

Das 'c' steht einfach nur für eine Zahl und soll angeben, dass zu jeder Stammfunktion eben noch eine Zahl addiert werden kann, ohne dass sie die Eigenschaft verliert Stammfunktion zu sein.
Man achte allerdings darauf, dass hier an dem Integralszeichen keine Grenzen (in obigen Beispielen 'a' und 'b') angegeben sind. Man nennt ein solche Integral ein **unbestimmtes Integral**, während ein Integral mit Grenzen, also etwa $\int\limits_a^b$ als **bestimmtes Integral** bezeichnet wird.
Es gilt:

Ein bestimmtes Integral ($\int\limits_a^b f(x)dx$) ist eine **Zahl**!

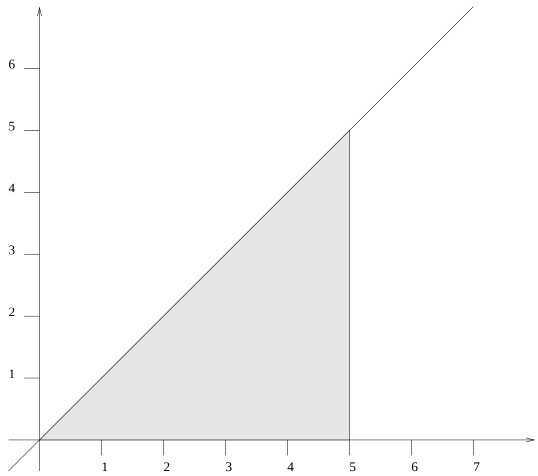
Ein unbestimmtes Integral($\int f(x)dx$) ist eine **Funktion**, die Stammfunktion!

19.3.4 Zwei Beispiele

Alles, was bisher in diesem Kapitel Thema war, war ausgesprochen theoretisch und sicherlich auch nicht immer leicht nachzuvollziehen und zu verstehen. Stimmt das eigentlich alles so?
Um diese Frage zu beantworten, sollen nun zwei Beispiele vorgef—"uhrt werden. Das erste Beispiel soll dazu dienen eine Fläche zu berechnen, die man auch ohne Integralrechnung berechnen könnte. Dabei wird man sehen, dass die Überlegungen zur Integralrechnung 'stimmen'. Im zweiten Beispiel soll dann allerdings auch mal eine Fläche berechnet werden, die man ohne Integralrechnung nicht berechnen könnte, bei dem man also sehen kann, dass das Ganze auch Sinn macht.

19.3.4.1 Das einfach Beispiel

Zunächst soll einmal eine Dreiecksfläche berechnet werden und zwar die folgende:



Das abgebildete Dreieck liegt in einem Koordinatensystem und man kann leicht erkennen, dass es eine Grundfläche der Länge 5 und eine Höhe der Länge 5 hat. Seine Fläche lässt sich daher mit der Formel für die Fläche von Dreiecken berechnen zu:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} 5 \cdot 5 = 12,5 \text{ FE}$$

'FE' bedeutet dabei Flächeneinheiten und hängt von dem gewählten Maßstab des Koordinatensystems ab. Ist eine Einheit des Koordinantesystems ein Zentimeter, dann ist eine FE ein Quadratzentimeter, ist sie ein Kilometer, dann ist FE ein Quadratkilometer, und so weiter.
Nun das Ganze mit der Integralrechnung. Die Linie, unter der das obige Dreieck liegt, ist der Funktionsgraph der Funktion:

$$f(x) = x$$

zu dieser Funktion lässt sich leicht eine Stammfunktion finden:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

wie man sich leicht klar machen kann, wenn man $F(x)$ ableitet:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]' = x = f(x)$$

Wenn nun alles stimmt, dann müsste sich die Dreiecksfläche auch berechnen lassen mit:

$$\int_0^5 x\,dx$$

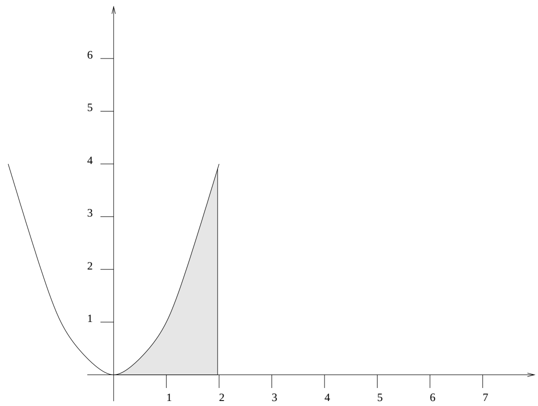
und das funktioniert mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} A_{Dreieck} &= \int_0^5 x\,dx \\ &= F(5) - F(0) \\ &= \frac{1}{2}5^2 - \frac{1}{2}0^2 \\ &= \frac{1}{2}25 - \frac{1}{2}0 \\ &= \frac{1}{2}25 = 12,5 \text{ FE} \end{aligned}$$

Sieht doch gut aus, oder?

19.3.4.2 Und nun das 'schwierige' Beispiel

Nun soll eine Fläche berechnet werden, die bislang noch nicht berechnet werden konnte.



Hier ist das Bild der Normalparabel zu $f(x) = x^2$ zu sehen und die Fläche, die berechnet werden soll ist die Fläche, die zwischen 0 und 2 unterhalb der Parabel liegt.
Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist die Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x^2\,dx \\ &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^3 \\ &= \frac{1}{3}8 - \frac{1}{3}0 \\ &= \frac{8}{3} = 2,\overline{6} \text{ FE} \end{aligned}$$

Hier lässt sich das Ergebnis leider nicht so leicht 'überprüfen', wie es beim ersten Beispiel der Fall war. Aufgrund unserer theoretischen Vorüberlegungen können wir allerdings sicher sein, dass dies wirklich der gesuchten Fläche entspricht[8].

[8] Es gibt auch noch andere Möglichkeiten diese Fläche zu berechnen und dann kann man die Ergebnisse vergleichen. Bei den Chemikern war etwa das folgende Verfahren recht beliebt: Man zeichnete den Funktionsgraphen möglichst genau auf sogenanntes Millimeterpapier und schnitt dann die gesuchte Fläche möglichst akkurat aus. Da die Fläche eines Quadratzentimeters Millimeterpapier mit den sehr genauen Waagen der Chemiker sehr genau bestimmt werden konnte, konnte durch Wiegung auch die gesuchte Fläche bestimmt werden!

19.4 Die Integrationsregeln

So wie es Ableitungsregeln gibt, um eine Ableitungsfunktion sofort aus der ursprünglichen Funktion zu bestimmen, so gibt es auch Regeln mit denen sofort eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion ermittelt werden kann.

> Hat eine Funktion die Form:
>
> $$f(x) = x^n$$
>
> dann ist
>
> $$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$
>
> eine Stammfunktion dieser Funktion.

Wurde beim Ableiten einer Potenz erst der 'alte' Exponent mit der Potenz multipliziert und dann deren Exponent um Eins verkleinert, so wird nun — genau umgekehrt — erst der Exponent der Potenz um Eins erhöht und dann die Potenz durch diesen neuen Exponenten dividiert.
Weiterhin gilt auch beim Integrieren (wie beim Ableiten):

> Hat eine Funktion die Form:
>
> $$f(x) = c \cdot g(x)$$
>
> dann ist
>
> $$F(x) = c \cdot G(x)$$
>
> eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist.

Wie schon beim Ableiten spielen also Zahlen, mit denen eine Funktion multipliziert wird beim 'aufleiten' keine Rolle. Und auch die nächste Regel dürfte vom Ableiten her bekannt sein:

> Hat $f(x)$ die Form
>
> $$f(x) = g(x) + h(x)$$
>
> und ist weiter $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und $H(x)$ eine von $h(x)$, dann ist
>
> $$F(x) = G(x) + H(x)$$
>
> eine Stammfunktion von $f(x)$.

Mit diesen drei Regeln lassen sich nun wieder zum Beispiel alle ganzrationalen Funktionen integrieren, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x - 3)\, dx &= \int x^2\, dx + \int 2x\, dx - \int 3\, dx \\
&= \int x^2\, dx + 2\int x^1\, dx - 3\int x^0\, dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3 \cdot \frac{1}{1}x^1 \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x
\end{aligned}$$

Weiterhin gelten aber auch noch die (schon bekannten) 'Sonderfälle':

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) + c$$

und

$$\int sin(x) \, dx = -\cos(x)$$
$$\int cos(x) \, dx = sin(x)$$

Aufgaben

A99. Gib die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an

a)	$f(x) = x^2$	b)	$f(x) = x^5$
c)	$f(x) = 3x^3$	d)	$f(x) = 3x^{-2}$
e)	$f(x) = x^4 + x^2$	f)	$f(x) = x^5 - x^3$
g)	$f(x) = 2x + 3$	h)	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

19.4.1 Höhere Integrationsregeln

Außer dem bisher genannten Integrationsregeln, die einfach genug sind, gibt es noch zwei weitere Integrationsverfahren, die allerdings nur für den Leistungskurs relevant sind und daher hier nur der Vollständigkeit halber benannt werden sollen.

19.4.1.1 Partielle Integration

Die partielle, also teilweise Integration ist in gewissem Sinne eine Umkehrung der Produktregel beim Ableiten. Sie lautet:

Für Funktionen, deren Funktionsterm ein Produkt aus zwei Teilfunktionen ist, gilt:

$$\int\limits_1^b (g'(x) \cdot h(x)) \, dx = [g(b) \cdot h(b) - g(a) \cdot h(a)] - \int\limits_a^b (g(x) \cdot h'(x)) \, dx$$

Mit dieser Regel kann etwa die Funktion $f(x) = 2x\cos(x)$ integriert werden.
Dazu muss zunächst zugeordnet werden, welcher Faktor $g'(x)$ und welcher $h(x)$ zugeordnet werden soll. Hier wird folgende Zuordnung vorgenommen:

$$\begin{array}{ll} g'(x) = \cos(x) & g(x) = \sin(x) \\ h(x) = 2x & h'(x) = 2 \end{array}$$

Damit ist nun:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\pi 2x\cos(x) \, dx &= 2 \cdot \pi \sin(\pi) - 2 \cdot 0 \sin(0) - \int\limits_0^\pi 2\sin(x) \, dx \\ &= 0 - 0 - 2 \int\limits_0^\pi \sin(x) \, dx \\ &= -2[-\cos(\pi) + \cos(0)] \\ &= -2[1 + 1] \\ &= -4 \end{aligned}$$

Aufgaben

A100. Bestimme die Werte der folgenden Integrale

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \int_0^2 4x \cdot e^x \, dx & \text{b)} & \int_{-1}^1 x \cdot e^{2x} \, dx \\ \text{c)} & \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(x) \, dx & \text{d)} & \int_0^1 x \cdot \cos(3x) \, dx \end{array}$$

19.4.1.2 Integration durch Substitution

Das nun folgede Verfahren entspricht der Kettenregel bei den Ableitungen. Es ist:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \, dz}$$

Im folgenden Beispiel wird $x^2 + 1 = g(x)$ gesetzt:

$$\begin{aligned} \int_1^2 2x \cdot \sin(x^2+1) \, dx &= \int_2^5 \sin(z) \, dz \\ &= -\cos(5) - (-\cos(2)) \\ &\approx -0,70 \end{aligned}$$

Man achte daraus, wie sich im ersten Schritt nach der Ersetzung auch die Integrationsgrenzen ändern!

Aufgaben

A101. Bestimme die folgenden Integralwerte

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx & \text{b)} & \int_0^1 2xe^{x^2} \, dx \\ \text{c)} & \int_{-1}^1 \frac{2x}{1+x^2} \, dx & \text{d)} & \int_1^2 \frac{4}{2x+5} \, dx \end{array}$$

19.5 Die Anwendung des Integrals

19.5.1 Das Integral

Integrale kommen in unterschiedlichen Formen vor und je nach Form haben sie gegebenenfalls auch unterschiedliche Bedeutungen. Diese Bedeutungen sollen hier vorgestellt werden.

19.5.1.1 Das unbestimmte Integral

Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird zur Berechnung eines bestimmten Integrals eine Stammfunktion von der Funktion gebraucht, über die integriert wird. Diese liefert das unbestimmte Integral und es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= F(x)[+c] \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Hat das Integralszeichen ($\int$) also keine Grenzen angegeben, dann ist das Ergebnis dieses Integrals eine (Stamm)Funktion und keine Zahl!

19.5.1.2 Die Integralfunktion

Ein ähnliches Ergebnis wie das unbestimmte Integral liefert die sogenannte **Integralfunktion**. Sie wird definiert als:

$$J_u(x) = \int_u^x f(x)\,dx$$

Sehr häufig kommen diese Integralfunktionen mit der unteren Grenze 0 vor, also

$$J_0(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

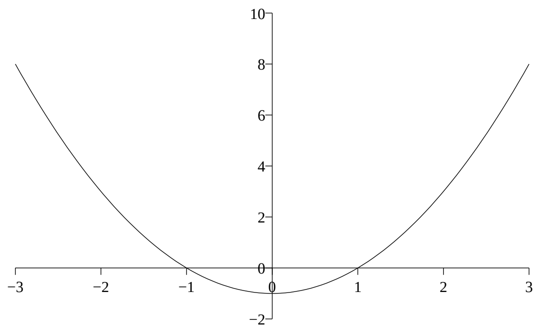
und jede so gebildete Integralfunktion ist eine Stammfunktion von $f(x)$. Die Umkehrung gilt allerdings nicht, nicht jede Stammfunktion einer Funktion kann auch als Integralfunktion geschrieben werden.

19.5.1.3 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral ergibt sich sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und 'a' und 'b' die sogenannten Integrationsgrenzen. Für den Ausdruck '$F(b) - F(a)$' schreibt man manchmal kürzer: '$[F(x)]_a^b$'
Man mache sich klar, dass das bestimmte Integral die Fläche zwischen Funktionsgraphen und x-Achse (in den Grenzen von a und b) sein **kann**, das muss aber nicht der Fall sein, wie die folgenden Beispiele zeigen.
Betrachten wir die Funktion: $f(x) = x^2 - 1$



Berechnet man hier das bestimmte Integral von 0 bis 1, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}1^3 - 1 - (\frac{1}{3}0^3 - 0) \\ &= \frac{1}{3} - 1 \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Das kann offenbar nicht der Inhalt der Fläche sein, die zwischen 0 und 1 vom Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen ist, denn Flächenmaßzahle können nicht negativ sein[9].

9 Hat man die Einführung in die Integralrechnung gelesen, dürfte klar sein, dass die Fläche den Inhalt $\frac{2}{3}$FE (ohne Minuszeichen) hat.

Noch skurriler wird es mit etwas geänderten Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\sqrt{3}} (x^2-1)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3}^3 - \sqrt{3} - (\frac{1}{3}0^3 - 0) \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}^2 - 1\right) \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\cdot 3 - 1\right) \\ &= \sqrt{3}(1-1) \\ &= \sqrt{3}\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Vergleicht man nun das Ergebnis mit dem obigen Bild des Funktionsgraphen, ist leicht erkennbar, dass es sich nicht um eine Flächenmaßzahl handeln kann.
Wie die Fläche zwischen Funktionsgraphen und x-Achse berechnet werden kann, wird in einem späteren Abschnitt behandelt. Trotzdem sollte man sich klar machen, dass auch dann, wenn ein bestimmtes Integral eben keine Flächenmaßzahl bedeutet, diese Zahl sinnvoll sein kann. Weitere Informationen finden sich im Abschnitt über die typischen Aufgaben in der Oberstufe, hier besonders die im Sachzusammenhang.

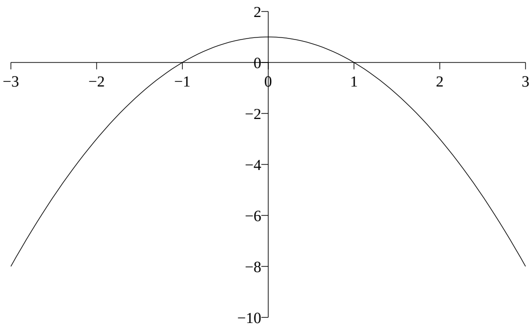
19.5.2 Flächenberechnung

19.5.2.1 Endliche Flächen - der Normalfall

Das Ergebnis des letzten Abschnitts scheint ein bisschen paradox zu sein. Der Wert eines bestimmten Integrals ist nicht unbedingt gleich der Flächenmaßzahl der Fläche zwischen 'a', 'b' der x-Achse und dem Funktionsgraphen, aber genau zur Berechnung einer solchen Fläche wurde doch das Integral 'erfunden'.
Die Lösung dieses Paradox ist recht einfach: Das bestimmte Integral ist ein Werkzeug mit dem oben genannte Fläche berechnet werden **kann**, es alleine reicht aber nicht aus.
Betrachten wir noch einmal das oben berechnete Integral zu der Funktion $f(x) = x^2 - 1$. Es ergab sich, dass

$$\int\limits_0^1 (x^2-1)\,dx = -\frac{2}{3}$$

Betrachtet man nun einmal die Funktion, die sich aus der obigen ergibt, wenn der Graph an der x-Achse gespiegelt wird.
Die Funktion hat nun die Gleichung: $f(x) = 1 - x^2$ und ihr Graph sieht folgendermaßen aus:



Bildet man nun das Integral von 0 bis 1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx &= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 0 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Zwei Dinge sind an diesem Ergebnis interessant. Zum einen, dass das Ergebnis vom Betrag her den gleichen Wert, wie das bei der nicht gespiegelten Funktion, da $|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$
Das zweite ist allerdings noch interessanter. Die beiden Flächen, um deren Berechnung es hier geht, müssen gleich groß sein, da die eine Funktion durch eine Spiegelung aus der anderen hervor gegangen ist. Die Fläche der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ liegt allerdings **unterhalb** der x-Achse, während die der Funktion $f(x) = 1 - x^2$ **oberhalb** dieser Achse liegt. Die Folgerung daraus muss sein:

> Liegt der Graph einer Funktion zwischen den Werten $x = a$ und $x = b$ vollständig oberhalb der x-Achse, dann ist:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$
>
> Liegt der Graph einer Funktion zwischen den Werten $x = a$ und $x = b$ vollständig unterhalb der x-Achse, dann ist:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$
>
> Unterscheiden sich die Funktionsgraphen weiter nicht, dann ist der Betrag der beiden Integrale gleich.

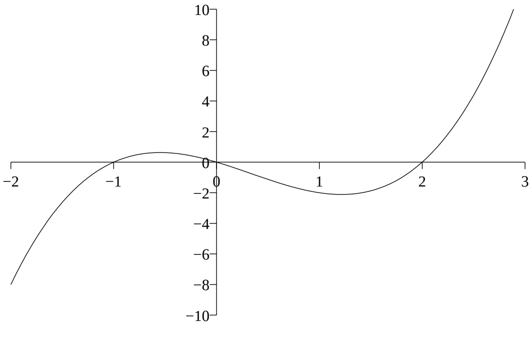
Mit diesem Wissen und dem Umstand, dass für Funktionsgraphen, die komplett oberhalb der x-Achse liegen, das Integral gleich der Flächenmaßzahl zwischen Funktionsgraphen und x-Achse (in den Grenzen von a und b) ist, können wir folgern:

> Liegt der Funktionsgraph einer Funktion zwischen $x = a$ und $x = b$ vollständig oberhalb oder vollständig unterhalb der x Achse, dann ist die Fläche, die begrenzt wird durch den Funktionsgraphen, die x-Achse und die Grenzen a und b gleich:
>
> $$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

Der einzige 'Haken', der jetzt noch existiert ist die Notwendigkeit, dass der Funktionsgraph zwischen a und b vollständig ober- oder unterhalb der x-Achse verlaufen muss — und was, wenn nicht?
Nun, dann erbringt die Integration keine korrekte Lösung. Der korrekte Weg eine Fläche zwischen Funktiongraphen und x-Achse zu berechnen soll daher nun an einem Beispiel vorgestellt werden:
Welche Fläche schließt der Funktionsgraph von

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

zwischen $x = -2$ und $x = 3$ mit der x-Achse ein?
Der Graph dieser Funktion im bewussten Bereich sieht folgendermaßen aus:



Der erste Schritt muss immer sein zu untersuchen, ob die Funktion innerhalb des Integrationsintervalls Nullstellen hat[10].

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x^2 - 2x \\ &= x(x^2 - x - 2) \\ x = -1 \qquad x &= 0 \qquad x = 2 \end{aligned}$$

Es liegen also sogar drei Nullstellen in dem Intervall zwischen -2 und 3, woraus sich insgesamt vier Integrale ergeben: Von -2 bis -1, von -1 bis 0, von 0 bis 2 und von 2 bis 3, also:

$$A = \left|\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{3} f(x)\,dx\right|$$

Das eigentliche Ausrechnen überlasse ich dem geeneigten Leser als Übung, aber es ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \left|-\frac{37}{12}\right| + \left|\frac{5}{12}\right| + \left|-\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{59}{12}\right| \\ &= \frac{37}{12} + \frac{5}{12} + \frac{8}{3} + \frac{59}{12} \\ &= \frac{149}{12} = 12,41\overline{6}\text{FE} \end{aligned}$$

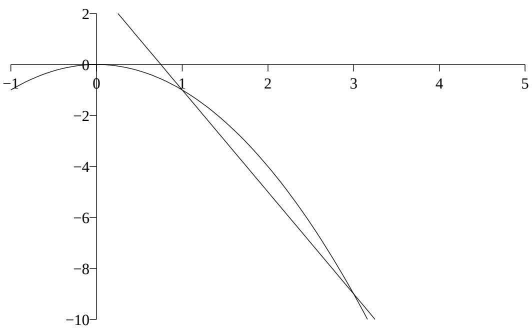
Aufgaben

A102. Berechne die Fläche die der Funktionsgraph der angegebenen Funktion und die x-Achse zwischen den angegebenen Grenzen einschließt.

a)	$f(x) = x^2 - 4 + 3, a = 0, b = 2$	b)	$f(x) = x^2 - 6x + 5, a = 0, b = 6$
c)	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x, a = 2, b = 5$	d)	$f(x) = x^3 + x^2 - 2x, a = -3, b = -1$

19.5.2.2 Endliche Flächen - ein Sonderfall

Ein etwas anders gelagerter Fall ist die Frage nach der Fläche, die zwei Funktionsgraphen miteinander einschließen. Bei den Funktionen $f(x) = -4x + 3$ und $g(x) = -x^2$ etwa, sieht das folgendermaßen aus:



Hier müssen zuerst die Stellen identifiziert werden, an denen sich die beiden Funktionsgraphen schneiden. Das geschieht dadurch, dass man die Gleichung $f(x) = g(x)$ löst.

Im vorliegenden Beispiel sind das $x = 1$ und $x = 3$, womit die Integrationsgrenzen feststehen.

Nun könnte man einzeln die Fläche unter dem einen und unter dem anderen Funktionsgraphen

[10] Im Rahmen einer Kurvendiskussion werden diese Nullstellen zumeist sowieso berechnet, so dass sich dieser Schritt in der Regel erübrigt.

berechnen, aber wegen der Regel über die Addition von Integralen, geht das auch einfacher:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int\limits_1^3 (f(x) - g(x))\, dx \right| \\
&= \left| \int\limits_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| \\
&= \left| 9 - 18 + 9 - (\frac{1}{3} - 2 + 3) \right| \\
&= \left| 0 - \frac{4}{3} \right| \\
&= \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3} \text{ FE}
\end{aligned}$$

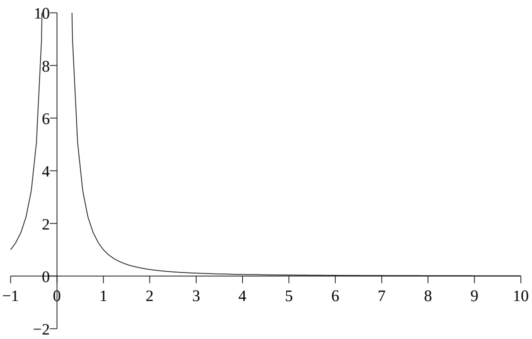
Aufgaben

A103. Berechne die Fläche, die die Funktionsgraphen der angegebenen Funktionen miteinander einschließen.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$
b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 3 - 2x$
c) $f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = -x + 20$
d) $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

19.5.2.3 Das uneigentliche Integral

Wenn man sich den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ansieht[11], ergibt sich das folgende Bild:



Man erkennt, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$, dass sich also der Graph sehr schnell der x-Achse annähert, je weiter man nach rechts geht.
Weiterhin liegt der Graph immer oberhalb der x-Achse.
Nun könnte man sich fragen, wie groß die Fläche zwischen x-Achse und Graphen, etwa zwischen $x = 1$ und $x = 2$, ist:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int\limits_1^2 x^{-2}\, dx \right| \\
&= \left| \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \right| \\
&= \left| -\frac{1}{2} - (-1) \right| \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

[11] Übrigens eine Funktion, die in dieser Form im normalen Mathematikunterricht nie auftreten wird!

Soweit, so gut, aber was passiert eigentlich, wenn man die rechte Integrationsgrenze weiter nach rechts verschiebt, etwa nach $x = 4$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int\limits_1^4 x^{-2}\,dx \right| \\ &= \left| \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 \right| \\ &= \left| -\frac{1}{4} - (-1) \right| \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Und man könnte natürlich noch weiter nach rechts gehen. Oder aber, man setzt einfach mal für die obere Integrationsgrenze eine Variable ein. Nehmen wir mal $x = z$.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int\limits_1^z x^{-2}\,dx \right| \\ &= \left| \left[-\frac{1}{x} \right]_1^z \right| \\ &= \left| -\frac{1}{z} - (-1) \right| \\ &= 1 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Und das ist nun interessant! Denn nun kann man nicht nur für jede weitere, rechte Integrationsgrenze sofort den Wert der Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraphen ausrechnen, sondern man kann sich auch über legen, was denn passiert, wenn $z \to \infty$ wandert! Es ergibt sich:

$$1 + \frac{1}{z} \to 1 \qquad \text{für} \qquad z \to \infty$$

Und das ist nun win wirklich interessantes Ergebnis, wenn man sich einmal klar macht, was es bedeutet.
Es bedeutet nämlich, dass die Fläche, die nun nur noch an drei Seiten begrenzt ist, nämlich der x-Achse, dem Funktionsgraphen und $x = 1$, eine (endliche) Flächenmaßzahl hat, obwohl die Fläche unendlich groß ist, da sie nach 'rechts' ja nicht mehr begrenzt ist.
Ein solches Integral, das zu mindestens einer Seite hin unbegrenzt ist, nennt man: **Uneigentliches Integral**.
Es wird berechnet, indem man da, wo später die Fläche unbegrenzt sein soll, eine Variable als Grenze angibt und sich bei dem ergebenden Term die Frage stellt, welchen Wert die Fläche annimmt, wenn diese Variable immer weiter nach Unedlich geht[12].

19.5.3 Mittelwert von Funktionen

Aus der Herleitung für Integrale ist bekannt, dass ein Integral 'eigentlich' eine Aufsummierung aller Funktionswerte zwischen den Integrationsgrenzen a und b darstellt[13].
Teilt man diesen Wert nun durch den Abstand der Integrationsgrenzen, dann ergibt sich automatisch der durchschnittliche Funktionswert innerhalb dieser Grenzen. Und so erhält man:

> Der Term
> $$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$
> gibt den Mittelwert der Funktion(swerte) im Intervall von a bis b an.

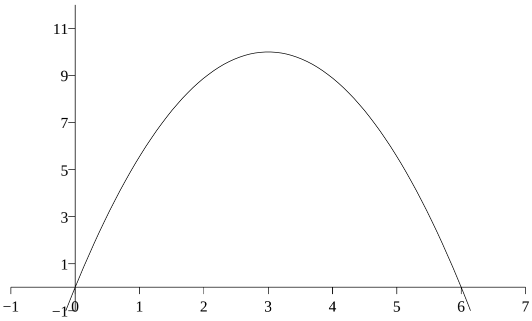
[12] Das ist ein bisschen eine Vereinfachung, genaueres im Unterricht!

[13] In diesem Sinne ist es auchzu verstehen, wenn man von Integration von Mitbürgern spricht: Sie werden einfach mit aufgenommen, mit dazu gezählt.

Ein Beispiel: Die Wachstumsperiode für eine bestimmte Baumart geht von März bis Anfang September. In dieser Zeit kann das Wachstum in Zentimetern durch die Funktion

$$w(x) = -\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x$$

beschrieben werden. $x = 0$ bedeutet dabei den Anfang des März und $x = 6$ den Anfang September. Außerhalb dieser Zeit wächst die Baumart nicht.



Es ist erkennbar, dass das Wachstum zu Beginn des Juni am größten ist. Würde man das Integral von $x = 0$ bis $x = 6$ berechnen, erhielte man als Ergebnis das Wachstum während der gesamten Wachstumsperiode, also

$$\int_0^6 \left(-\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x\right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{10}{27}x^3 + \frac{10}{3}x^2\right]_0^6 \\ &= 80 + 120 - 0 \\ &= 200 \end{aligned}$$

Ein solcher Baum wächst als pro Jahr um cirka 2m.
Dividiert man nun diesen Wert durch die Anzahl der Monate, welche die Wachstumsperiode ausmacht, dann erhält man das durchschnittliche Wachstum pro Monat, eben den Mittelwert: $\frac{1}{6} \cdot 2 = 0,\overline{3}$.

19.6 Fachbegriffe

Integral

Das Integral ist in gewissem Sinne die Umkehrung der Ableitung. Es kann verwendet werden, um Flächen, Mittelwerte und viele weitere Werte zu berechnen,

Integral, bestimmtes

Das bestimmte Integral ist eine Zahl, die mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden kann. Sie wird berechnet als:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Integralfunktion

Eine Integralfunktion ergibt sich, wenn man eine Funktion $f(x)$ über die Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = z$ integriert.

Integral, unbestimmtes

Auch das unbestimmte Integral wird mit einem Integralszeichen geschrieben, hat aber ein vollkommen andere Bedeutung als das unbestimmte Integral. Es jat keine Integrationsgrenzen und als Ergebnis die Stammfunktion der Funktion, die zwischen dem Integralzeichen und dem 'dx' steht.

$$\int f(x)\,dx = F(x)[+c]$$

Integral, uneigentliches

Ein bestimmtes Integral, das zu mindestens einer Seite hin nicht begrenzt ist. Es kann zur Berechnung unendlich großer Flächen verwendet werden.

Mittelwert einer Funktion

Den durchschnittlichen Funktionswert einer Funktion innerhalb des Intervalls $[a; b]$ erhält man durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Stammfunktion

Eine Stammfunktion i$F(x)$ ist eine Funktion, deren Ableitung eine gegebene Funktion $f(x)$ ergibt.

$$F'(x) = f(x)$$

Man erhält sie durch die Umkehrung der Ableitung, wenn man so will 'Aufleitung'.

Keine Panik!

20 Aufgaben in der Oberstufe

Herzlichen Glückwunsch!
Du hast es geschafft alle Methoden und Verfahren kennen zu lernen, die du für die Oberstufe brauchst[1]. Es bleibt allerdings die Frage, was man mit diesen 'Werkzeugen' denn so alles anfangen kann und damit sind wir bei der Frage, wie den 'typische' Oberstufenaufgaben in der Analysis denn so aussehen.

20.1 Steckbriefaufgaben

20.1.1 Was ist eine Steckbriefaufgabe

In den vergangenen Abschnitten kam immer mal wieder die Frage auf, wie man denn eine Funktionsgleichung aus gewissen Angaben, da waren es zumeist Punkte, durch die der Funktionsgraph hindurchgeht, gewinnen kann. Die Steckbriefaufgaben sind eine Erweiterung dieses Gedankens.
Auch bei einer Steckbriefaufgabe werden Bedingungen an den Funktionsgraph einer Funktion gestellt und dann versucht die Frage zu beantworten, wie denn die zugehörige Funktionsgleichung aussieht. Im Unterschied zu bisherigen Aufgaben diesen Typs, werden aber nicht nur Punkte angegeben, durch welche der Funktionsgraph geht, sondern es können auch andere Angaben gemacht werden.

20.1.2 Ein Beispiel

Von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades soll gefordert werden, dass sie:

1. durch den Koordinatenursprung geht.
2. bei $x = 0$ eine waagerechte Tangente hat.
3. bei $x = 1$ eine Nullstelle und
4. bei $x = 0,5$ den Funktionswert $f(0,5) = 0,125$ haben soll.

Die Bedingungen 1, 3 und 4 sind letztlich wieder nur Angaben von Punkten auf dem Funktionsgraphen. Neu ist die Bedingung 2!
Es ist klar, dass bei $x = 0$ gelten muss, dass $f'(x) = 0$ ist, aber wie kann das mathematisch gefasst und zur Lösung des Problems heran gezogen werden?
Zunächst einmal mache man sich klar, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades sich immer als

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

schreiben lässt. Damit ergeben sich aus den Bedingungen 1, 3 und 4 drei Gleichungen, wie schon früher geschehen:

$$\begin{array}{ll} I & 0 = f(0) \\ III & 0 = f(1) \\ IV & 0,125 = f(0,5) \end{array}$$

Nun kann man aber auch die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion 3. Grades ableiten und erhält:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Damit kann man nun auch die zweite Bedingung in eine Gleichung fassen:

$$II \quad 0 = f'(0)$$

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat vier unbekannte Größen, nämlich 'a', 'b', 'c' und 'd'. Mit vier Gleichungen lassen sich diese ausrechnen. Schreibt man die bislang gefundenen vier Gleichungen etwas ausführlicher, ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl} I & 0 & = & [a0^3 + b0^2 + c0+]d \\ II & 0 & = & [3a0^2 + 2b0+]c \\ III & 0 & = & a + b + c + d \\ IV & 0,125 & = & 0,125a + 0,25b + 0,5c + d \end{array}$$

[1] Das gilt natürlich nur dann, wenn du den Text von Anfang bis hier durchgelesen und verstanden hast.

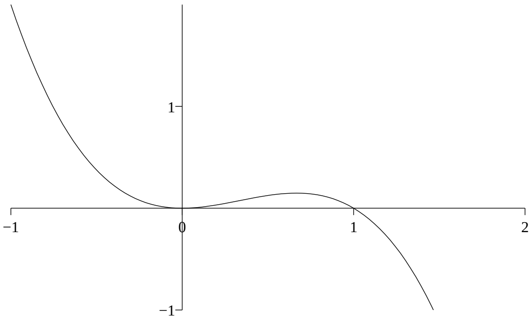
Da aus den ersten beiden Gleichungen hervorgeht, dass $c = 0$ und $d = 0$ ist, vereinfacht sich das Gleichungssystem zu:

$$\begin{array}{lcl} III \quad 0 & = & a + b \\ IV \quad 0,125 & = & 0,125a + 0,25b \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $a = -1$ und $b = 1$.
Da man nun alle Werte kennt, kann man auch die Funktionsgleichung angeben:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)x^3 + 1x^2 + 0x + 0 \\ &= -x^3 + x^2 \end{aligned}$$

und betrachtet man sich den Funktionsgraphen dieser Funktion:



dann zeigt sich, dass der Graph tatsächlich alle Bedingungen erfüllt.

20.1.3 Generelle Vorgehensweise

Zuerst muss man sich klar machen, welche Art von Funktion denn gesucht ist. Daraus ergibt sich eine generelle Form der Funktionsgleichung, die normalerweise noch Variablen enthält. Die Anzahl der Variablen in dieser Gleichung muss gleich der Anzahl der Gleichungen sein, die aufgestellt werden müssen[2] Man muss nun im Aufgabentext genau so viele Bedingungen identifizieren, wie man Gleichungen braucht und jede dieser Bedingungen in die Form einer Gleichung bringen[3].
Bezieht sich eine oder mehrere der Bedingungen auf eine der ABleitungsfunktionen der gesuchten Funktion, dann kann auch die allgemeine Form der Funktionsgleichung abgeleitet werden und aus diesen Gleichungen dann eine Gleichung für das Gleichungssystem gemacht werden.
Löst man das entstandene lineare Gleichungssystem mit den bekannten Methoden, dann erhält man die Variablenwerte der allgemeinen Funktionsgleichung und damit die Funktionsgleichung selber.

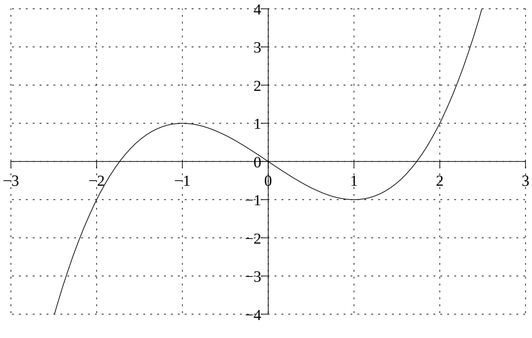
Aufgaben

A104. Eine Parabel schneidet die y-Achse beim Wert 3. Sie verläuft durch den Punkt (1/6) und dort hat eine Tangente an den Graphen die Steigung 4.
Berechne die Funktionsgleichung.

A105. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung des Koordinatensystems. Weiterhin hat die Tangente an den Wendepunkt $W(1/0)$ die Steigung -1.
Gib die Funktionsgleichung an.

A106. Eine Funktion 3. Grades berührt (nicht: schneidet!) die Parabel zu $g(x) = 2x^2 - 4x$ in deren Scheitelpunkt. Der Punkt $W(0/-1)$ ist Wendepunkt.
Berechne die Funktionsgleichung.

A107. Gib zu folgendem Graphen



[2] Bei ganzrationalen Funktionen ist es immer eine Variable/Gleichung mehr als der Grad der Funktion.

[3] Das ist oftmals die größte Schwierigkeit bei den Steckbriefaufgaben, weil die 'Erfinder' dieser Aufgaben die Bedingungen gerne 'verstecken' und man sie daher nur schwer findet.

die Funktionsgleichung an.

A108. Im Zusammenhang mit Steckbriefaufgaben ist es sehr ratsam sich selbst einemal einige Steckbriefaufgaben zu erstellen. Hierbei ist es von besonderem Interesse, wenn man dabei **Fehler** macht[4]. Man bekommt dadurch ein wirklich gutes Gespühr für den Verlauf von Funktionsgleichungen, was sein kann und was nicht sein kann.
Begründe wieso es keine ganzrationale Funktion 2. Grades geben kann, die bei $x = 1,2$ ihren Scheitelpunkt und bei $x = 0,2$ und $x = 2$ jeweils eine Nullstelle hat.

A109. Begründe, wieso es keine ganzrationale Funktion 3. Grades geben kann, die im Punkt (1/2) ein relatives Maximum hat und bei (2/3) einen Wendepunkt.

20.2 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben geht es prinzipiell immerdarum, dass eine Größe, die an gewisse Bedingungen gebunden ist, möglichst groß oder möglichst klein werden soll.
Um eine derartige Aufgabe lösen zu können, muss die Abhängigkeit der Größe von den Bedingungen durch eine Funktion dargestellt werden, von der dann das Maximum oder Minimum bestimmt werden kann.

20.2.1 Ein klassisches Beispiel

Geradezu **das** klassische Beispiel einer Extremwertaufgabe ist die Aufgabe Höhe und Breite einer Konservendose so zu bestimmen, dass bei einem Liter Inhalt der Blechverbrauch (Oberfläche) der Dose möglichst klein wird.
Es geht also um die Oberfläche der Dose unter der Bedingung, dass der Inhalt der Dose einen Liter beträgt.
Eine Dose ist ein Zylinder. Nennt man den Radius der Grundfläche der Dose 'r' und ihre Höhe 'h', dann gelten für die Oberfläche und das Volumen eines Zylinders:

$$O = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi h \qquad V = r^2\pi h$$

Da das Volumen feststeht, es beträgt einen Liter oder 1000cm^3, kann man die rechte Formel in diesem Fall umformen zu:

$$1000 = r^2\pi h$$

Das weitere Vorgehen erinnert an das Einsetzungsverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Da man die Oberfläche minimieren will, sollte die Oberflächenformel in eine Oberflächenfunktion 'umgebaut' werden. Dazu formt man die Volumenformel nach einer Variablen um und ersetzt diese Variable dann in der Oberflächenformel durch den passenden Term:

$$\begin{aligned} 1000 &= r^2\pi h \\ \frac{1000}{r^2\pi} &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi\frac{1000}{r^2\pi} \\ &= 2 \cdot r^2\pi + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Die Oberfläche hängt jetzt nur noch von 'r' ab[5] und kann daher als Funktion aufgefasst werden:

$$O(r) = 2r^2\pi + 2000r^{-1}$$

Von dieser Funktion muss nun das Minimum bestimmt werden. Die Ableitungsfunktion lautet:

$$O'(r) = 4\pi r - 2000r^{-2}$$

Setzt man diese gleich Null, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \\ \frac{2000}{r^2} &= 4\pi r \\ \frac{2000}{4\pi} &= r^3 \\ 5,42 &\approx r \end{aligned}$$

[4] Und das geschieht mit unausweichlicher Notwendigkeit.

[5] Was daran liegt, dass hier das fixe Volumen schon eingerechnet ist.

Die überprüfung der hinreichenden Bedingung[6] ergibt, dass bei diesem Wert von 'r' tatsächlich ein Minimum vorliegt.
Für die Höhe ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1000}{5,42^2\pi} \\ &\approx 10,84 \end{aligned}$$

Also genau den doppelten Radius.
Eine Konservendose kann also dann mit minimalem Blechverbrauch gebaut werden, wenn sie von der Seite wie ein Quadrat aussieht und knapp 11cm Höhe und den gleichen Durchmesser (=doppelter Radius) hat.

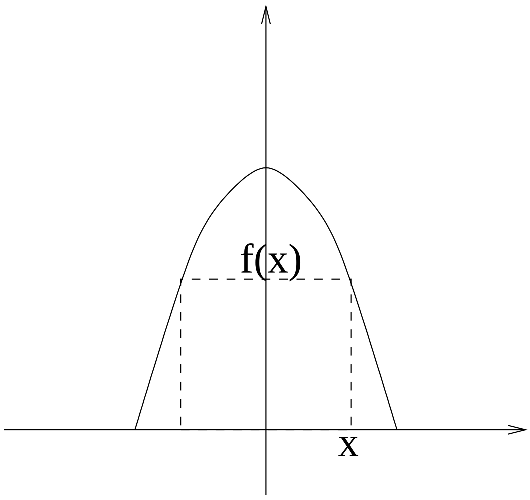
20.2.2 Das generelle Vorgehen

Durch ihre häufige 'Realitätsnähe' können Extremwertaufgaben sehr unterschiedlich sein, so dass ein allgemeingültiges Vorgehen praktisch nicht angegeben werden kann, dennoch lassen sich einige Prinzipien festhalten:

1. Identifiziere die Größe, die minimal oder maximal werden soll.
2. Nutze die weiteren Bedingungen, um die Größe aus 1. als Funktionwert einer Funktion auszudrücken.
3. Bestimme für diese Funktion auf den bekannten Wegen das Maximum oder Minimum.
4. Beachte dabei die Randwerte (Siehe unten).

20.2.3 Ein typisches Beispiel

Oftmals werden Extremwertaufgaben auch im Zusammenhang mit Funktionsgraphen gestellt. Ein dafür typisches Beispiel soll ebenfalls vorgestellt werden.
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2+4$. Zwischen Funktionsgraph und x-Achse soll ein Rechteck so eingezeichnet werden, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.
Bei Aufgaben dieser Art empfiehlt es sich auf jeden Fall die Situation zu skizzieren:



Gemäß der obigen Empfehlung sollte zunächst die Größe identifiziert werden, die (in diesem Fall) maximal werden soll. Das ist die Fläche des Rechecks.
Die Fläche eine Rechtsecks hat die Größe: Breite mal Länge. Die Breite des hier gesuchten Rechtecks ist $2x$ (einmal von der x-Achse um x Einheiten nach rechts und einmal nach links. Die Höhe des Rechtecks ist gleich dem Funktionswert bei diesem x.
Indirekt ist nun auch schon die zweite obige Empfehlung eingeflossen, denn dadurch, dass die Höhe des Rechecks durch den Funktionsgraphen begrenzt wird, ist seine Höhe durch $f(x) = -x^2 + 4$ festgelegt.
Damit ist dann aber auch schon die Funktion bekannt, mit der die Fläche ausgedrückt werden kann:

$$A(x) = 2x \cdot (-x^2 + 4) = 8x - 2x^3$$

Hier gilt nun weiter

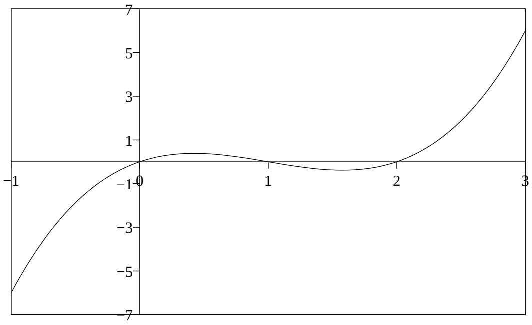
$$\begin{aligned} A'(x) &= 8 - 6x^2 \\ A''(x) &= -12x \end{aligned}$$

[6] Hier nicht ausgeführt, aber glaubt mir einfach mal.

Die erste Ableitungsfunktion hat die Nullstellen: $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,15$. Dabei ergibt sich für $x = 1,15$, dass die zweite Ableitung kleiner als Null ist, und somit ein Maximum vorliegt.
In vielen Aufgaben wird außerdem gefordert die maximale Fläche auch anzugeben, aber dazu muss der gefundene Wert nur in $f(x)$ eingesetzt werden, so dass ich das hier dem geneigten Leser als Übung überlasse, interessanter ist das

20.2.4 Randwertproblem

Betrachtet man sich die obige Aufgaben noch einmal genauer, dann stellt man fest, dass es für 'x' in diesem Zusammenhang einen größen und einen kleinsten sinnvollen Wert gibt.
Offenbar ist $x = 0$ der kleinste Wert, der sinnvoll ist, weil bei Werten unter Null nur die Rolle von Maximum und Minimum vertauscht werden. Außerdem ist aber $x = 2$ der größte sinnvolle Wert, denn sonst wäre das Recheck breiter als der Teil der Parabel, der oberhalb der x-Achse liegt.
Eine ähnliche Einschränkung kann sich auch durch einen vorgegebenen Definitionsbereich der Funktion ergeben, wie im Abschnitt über Aufgaben im Sachzusammenhang nochdeutlich werden wird.
Nun kann es aber sein, dass eine Funktion, die nur für x-Werte in einem Intervall gültig ist, zwar im Inneren des Intervalls ein Maximum besitzt, die Funktionswerte 'an den Rändern' aber höher sind, als bei diesem Maximum, wie der folgende Funktionswert zeigt:



Die gezeigte Funktion hat zwar zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ein (relatives) Maximum, genauer bei $x \approx 0,42$, aber der Funktionswert am rechten Rand, denn es gilt:

$$f(0,42) \approx 0,38$$
$$f(3) = 6 > 0,38$$

Aus diesem Grunde gilt daher:

> Überprüfe bei Extremwertaufgaben **immer** auch die Werte 'am Rand' des sinnvollen (oder definierten) Bereichs der Variablen.

Für das obige Beispiel mit der Parabel ist das allerdings harmlos. Wenn der Wert von $x = 0$ ist, dann hat auch das dazu gehörige Rechteck die Fläche Null und gleiches gilt für $x = 2$[7], was in keinem Fall das Maximum sein kann.

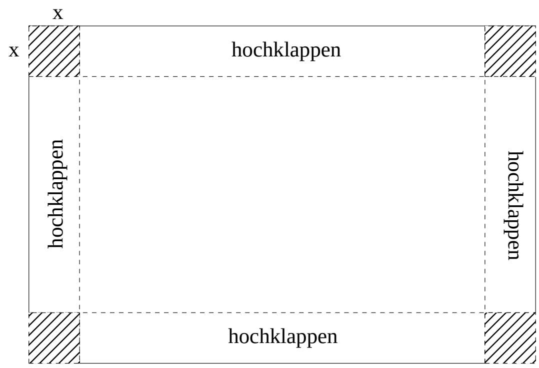
20.2.5 Achtung!

Und noch ein Hinweis! Manchmal sind Extremwertaufgaben viel, viel einfacher, als es zunächst den Anschein hat. Das folgende Beispiel ist daher als Aufgabe formuliert, deren Lösung sich erst hinten findet. Versuche erst mal es selber zu lösen, es ist wirklich einfach.

Aufgaben

A110. Von einem DIN A4 Blatt (210x297mm) soll an den vier Ecken ein jeweils gleich großes Quadrat ausgeschnitten werden. Die dadurch entstehenden 'Flügel' können nach oben geklappt werden, so dass sich ein quaderförmiges Kästchen ergibt.
Berechne wie groß die Quadrate sein müssen, damit das Volumen des Kästchens maximal wird.

[7] Sollte man sich anhand der Skizze klar machen!



A111. Aus Blech soll ein Becher gefertigt werden, der die Form eines unten geschlossenen Zylinders hat und der $200cm^3$ fassen soll.
Berechne den Durchmesser und die Höhe dieses Bechers, wenn bei seiner Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht werden soll.

A112. Zerlege die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

A113. Ein Fenster hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis. Die Fläche des Fensters beträgt genau einen Quadratmeter ($=10000cm^2$).
Berechne die Abmessungen des Fensters, damit der Umfang möglichst klein wird.

20.3 Aufgaben im Sachzusammenhang

Aufgaben im Sachzusammenhang sind einfach Textaufgaben und es gilt alles, was im entsprechenden Abschnitt dazu gesagt wurde.
Bedauerlicherweise allerdings auch, dass man die Probleme, die sich mit Aufgaben im Sachzusammenhang ergeben letztlich nur durch **üben** lösen kann. Das kann nicht Aufgabe dieses Textes sein, sondern sollte im Unterricht erledigt werden.
Dennoch gibt es einige Dinge, die im Zusammenhang mit Aufgaben im Sachzusammenhang immer wieder auftreten, und die daher hier angesprochen werden sollen.

20.3.1 Art der Funktion

Bei Aufgaben im Sachzusammenhang wird zumeist eine Funktion angegeben[8]. Man sollte **sehr** darauf achten, ob es sich um eine

Bestandsfunktion

oder um eine

Änderungsfunktion

handelt, da von dieser Unterscheidung oftmals die komplette Berechnung der Aufgabe abhängt[9]
Der Unterschied lässt sich am besten an einem Beispiel erklären: Angenommen, in der Aufgabe geht es um einen Wassertank, der gefüllt oder geleert werden kann. In diesem Zusammenhang wäre eine
Bestandsfunktion eine Funktion, die (etwa in Abhängigkeit von der Zeit) angibt, wieviel Wasser sich im Tank befindet, während eine
Änderungsfunktion eine Funktion wäre, die für jeden Zeitpunkt angibt, wieviel Liter in den Tank hinein- oder hinausfließen.
Man sollte sich zu Beginn der Aufgabe immer die Frage stellen (und möglichst auch richtig beantworten), um welche Art von Funktion es sich bei der gegebenen handelt, weil von dieser Frage in der Regel sehr viele Einzelaspekte der Aufgabe abhängen. Dabei gilt:

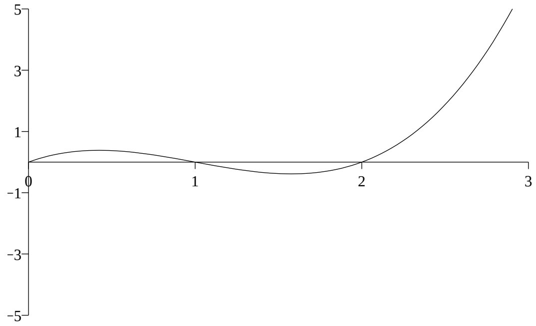
> Die **Änderungsfunktion** ist die Ableitung der Bestandsfunktion.
> Die **Bestandsfunktion** ist die Integralfunktion der Änderungsfunktion.

Zur Illustration der Bedeutung soll hier noch einmal ein Beispiel dienen. Dazu betrachten wir noch einmal den Funktionsgraphen, der oben dazu diente das Randwertproblem zu erläutern.

---

8 Oder muss per Steckbriefaufgabe 'zusammengebastetl' werden.

9 Man kann diesen Unterschied wirklich nicht übertreiben!



Angenommen diese Funktion würde zwischen ihren Nullstellen, also zwischen $x = 0$ und $x = 2$ den obigen Wasserstand beschreiben und wir müssten den Zeitpunkt des maximalen Wasserstandes im Tank ermitteln.
Handelt es sich um eine Bestandsfunktion, dann ist das gesuchte maximale Wasservolumen identisch mit dem Maximum der Funktion, das bei $x \approx 0,42$ lag und den Wert $f(0,42) \approx 0,38$ hatte[10].
Handelt es sich hingegen um eine Änderungsfunktion, dann läge das gesuchte Maximum bei $x = 1$, denn links von der 1 verläuft die Änderungsfunktion immer oberhalb der x-Achse, was nichts anderes bedeutet, als dass Wasser in den Tank hineinfließt. Bei $x = 1$ wird aus dem Zu- ein Abfluss, da sich ab da der Graph unterhalb der x-Achse befindet. Wollte man nun auch noch wissen, wieviel Wasser sich denn zu diesem Zeitpunkt im Tank befindet, so müsste man das Integral von 0 bis 1 zur Wassermenge zum Zeitpunkt 0 addieren[11]. Das Integral gibt an wieviel Wasser (Bestand!) zwischen 0 und 1 in den Tank hinein geflossen ist.

20.3.2 Randwertproblem

Bei Aufgaben im Sachzusammenhang ist es oftmals so, dass der Definitionsbereich eingeschränkt ist. Das findet sich oftmals schon sehr früh im Aufgabentext, der etwa folgendermaßen formuliert sein könnte:

> *Für die Werte von $x = 0$ bis $x = 2$ beschreibt die Funktion...*

Hier wird also der Definitionsbereich schon sofort als das Intervall zwischen 0 und 2 angegeben. Für Zahlwerte außerhalb dieses Intervalls liefert die Funktion kein gültiges Modell der Wirklichkeit. Muss man, nach Aufgabenstellen, später ein Maximum oder Minimum dieser Funktion bestimmen, dann muss man zusätzlich auch noch untersuchen, ob der Funktionswert 'am Rand', das heißt hier bei $x = 0$ und $x = 2$, größer als das Maximum oder kleiner als das Minimum ist.

20.4 Fachausdrücke

Änderungsfunktion
: Der Wert einer —"Anderungsfunktion beschreibt, wie sich eine gegebene Größe ändert. Liegt der Funktionswert im Positiven, dann nimmt die Größe zu, liegt er im Negativen, dann nimmt die Größe ab.
Die Integralfunktion der Änderungsfunktion ist die Bestandsfunktion.

Bestandsfunktion
: Der Funktionswert einer Bestandsfunktion gibt an, wieviel von einer Größe vorhanden ist.
Die Ableitung der Bestandsfunktion ergibt die Änderungsfunktion.

Randwertproblem
: Wenn der Definitionsbereich einer Funktion begrenzt ist, dann können die Funktionswerte am Rand dieses Bereichs größer/kleiner sein, als das berechenbare Maximum/Minimum innerhalb des Bereichs.
Dieser Wert ist dann das absolute Maximum/Minimum der Funktion innerhalb des Definitionsbereichs.

Steckbriefaufgabe
: Eine Aufgabe, bei der ein Funktionsgraph durch Eigenschaften der Funktion (Punkte), oder der ersten oder zweiten Ableitungsfunktion (Steigungen, Extrema, ...) beschrieben wird und die Funktionsgleichung aufgrund dieser Angaben ermittelt werden muss.

---

[10] Hier übrigens ohne das Problem des Randwertes, denn in den Grenzen von $x - 0$ bis $x = 2$ ist das relative auch das absolute Maximum dieser Funktion.

[11] Dieser Wasserstand müsste angegeben sein!

III Vektorrechung und analytische Geometrie

Keine Panik!

21 Rechnen mit Vektoren

Der Titel dieses Teils besteht aus zwei Teilen: 'Vektorrechnung' und 'Analytische Geometrie'. Der Grund dafür besteht darin, dass in der Schule Vektoren immer sofort zusammen mit einer Interpretation dessen, wofür diese Vektoren stehen, unterrichtet wird.
Der letzte Satz verdient ein bisschen Erläuterung.
Angenommen wir hätten eine Rechung der Art:

$$2 + 3 = 5$$

dann entspricht diese Rechnung unseren Vorstellungen davon, wie mit Zahlen gerechnet werden soll. Darüber hinaus kann man diese Rechnung aber auch in einer bestimmten Art und Weise *interpretieren*! So könnte die obige Rechnung auch bedeuten: 'Zwei Äpfel plus drei Äpfel sind fünf Äpfel'. Es könnte aber auch sein, dass sie für 'Zwei Euro plus drei Euro sind fünf Euro' steht, das ergibt sich aus dem Zusammenhang.
Vollkommen analog kann man 'Vektoren' auch als '*Dinge*' sehen, die einerseits keine Zahlen sind, mit denen man aber eben auch rechnen kann. Und **diese** Rechnungen können dann ihrerseits auch wieder interpretiert werden, so wie es oben mit den Zahlen geschehen ist.
Wie oben gesagt wird bei den Vektoren zumeist die Rechnung mit ihnen und ihre Interpretation[1] 'auf einmal' unterrichtet.
Nach meinen Erfahrungen im Unterricht stiftet das mehr Verwirrung als dass es hilft. Ich werde daher hier in diesem Teil das '*Rechnen*' mit Vektoren und der Interpretation dessen, was sie '*darstellen*' voneinander trennen. Aber keine Angst, alle Interpretationen, die in der Schule relevant sind, werden auch hier vorkommen.

21.1 Was ist ein Vektor?

Nun, die erste Frage, die beantwortet werden muss ist natürlich die Frage danach, **was** ein Vektor denn eigentlich ist und die Antwort darauf ist eigentlich ziemlich einfach:

> Ein Vektor besteht aus *mehreren* Zahlen mit einer Reihenfolge. Es ist also festgelegt, welches die erste Zahl ist, welches die zweite usw.
> Die Anzahl der Zahlen in einem Vektor nennt man: **Dimension** des Vektors.

Ein zweidimensionaler Vektor enthält also zwei Zahlen, ein dreidimensionaler drei, und so weiter. Außerdem ist es wichtig, dass die Reihenfolge der Zahlen innerhalb des Vektors von Bedeutung ist.

21.1.1 Schreibweise

Die üblichste Schreibweise für einen Vektor ist die sogenannte 'Spaltenschreibweise'. Bei dieser Schreibweise werden die Zahlen des Vektors übereinander in eine Spalte geschrieben. Um kenntlich zu machen, dass es sich um einen Vektor handelt, werden diese Zahlen dann noch von runden Klammern eingefasst.
Hat man beispielsweise einen dreidimensionalen Vektor, dessen erste Zahl eine 1, die zweite eine 4 und die dritte eine 10 ist, dann schreibt man das folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die erste Zahl seht also ganz oben an erster Stelle, die zweite darunter und die dritte dann ganz unten.
Ein zweidimensionaler Vektor mit der ersten Zahl -1 und der zweiten 3 sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen eines Vektors nennt man auch die Elemente des Vektors.

[1] Natürlich müsste man eigentlich sagen, dass nur eine Interpretation dabei eine Rolle spielt. So wie sich Zahlen auf sehr unterschiedliche Arten interpretieren lassen, ist es auch bei Vektoren. — Auch so was, was in der Schule oft verschwiegen wird.

21.1.2 Schreibweise für Variablen

Natürlich kann man auch Variablen verwenden, um Vektoren zu bezeichnen. Die Variablen sind dann eben einfach ein Platzhalter für einen Vektor und nicht, so wie bisher bekannt, Platzhalter für eine Zahl.
Weil nun aber in manchen Rechnungen Zahlen und Vektoren gleichzeitig vorkommen, muss auch eine besondere Schreibweise her. Die Regeln und Schreibweisen für die Variablen sollten dabei natürlich möglichst wie gewohnt weiter funktionieren, daher muss eine neue Art von Variablen für Vektoren her.
Es hat sich eingebürgert, dass man Variablenvektoren ebenfalls mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet, um sie aber von den Variablen für Zahlen unterscheiden zu können, wird ein kleiner Pfeil[2] darüber gezeichnet. Nun kann man also schreiben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Man mache sich klar, dass die Variable '$\vec{a}$' für einen **Vektor** steht. Die Variablen 'a_1', 'a_2' und 'a_3' stehen dagegen für Zahlen, nämlich genau die Zahlen, die in dem Vektor enthalten sind.

21.1.3 Der Nullvektor

Ein bseonderer Vektor ist der sogenannte Nullvektor. Seine Elemente sind, unabhängig von der Dimension, ausschließlich Nullen.
Ein zweidimensionaler Nullvektor ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein dreidimensionaler ensprechend:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein findet man für den Nullvektor oftmals die Schreibweise: $\vec{0}$.

21.2 Rechenregeln

Nachdem nun klar ist, was ein Vektor ist[3], geht es nun erst mal um die Frage, wie man mit ihnen rechnet. Und dazu gibt es nun erst mal eine gute Mitteilung: Das Rechnen mit Vektoren ist **wesentlich** einfacher als mit Zahlen!
Und damit sind wir schon bei der ersten und wichtigsten Rechenregel für Vektoren:

> Es können **immer nur** Vektoren mit gleicher Dimension miteinander verrechnet werden.

Oben wurde schon angedeutet, dass es Rechnungen gibt, in denen Zahlen und Vektoren zusammen vorkommen, aber es kann beispielsweise keine Rechnung geben, in der zweidimensionale und dreidimensionale Vektoren zusammen vorkommen.
Das Schöne an Vektoren ist aber unter anderem, dass die Rechenregeln immer gleich bleiben, unabhängig davon, welche Dimension die beteiligten Vektoren haben. Also die Addition wird etwa für zweidimensionale und dreidimensionale Vektoren vollkommen gleich definiert! Zwar werde ich hier im Wesentlichen mit dreidimensionalen Vektoren arbeiten, aber das was hier gesagt wird, gilt für Vektoren jeder beliebigen Dimension.

[2] Das hat wieder was mit der Interpretation dessen zu tun, wofür ein Vektor stehen soll. Eine sehr häufige Interpretation ist dabei, dass man den Vektor als Pfeil interpretiert — kommt noch — daher die Schreibweise.

[3] Zugegebenermaßen weiß man allerdings noch nicht, wozu die Dinger überhaupt gut sein sollen, aber wie gesagt: Keine Panik, dass kommt noch mit der Interpretation der Vektoren — und dann sind die wirklich Klasse!

21.2.1 Gleichheit

Die erste Rechenregel für Vektoren ist so einfach wie leicht zu verstehen. Sie besagt, wann zwei Vektoren gleich sind:

> Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre jeweiligen Elemente gleich sind.
>
> $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
>
> $$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{array}$$

Damit ist gemeint, dass die erste Zahl des ersten Vektors gleich der ersten Zahl des zweiten Vektors sein muss. Das gleich gilt für die jeweils zweiten Zahlen, und so weiter. Auf die Schreibweise der Zahlen kommt es dabei nicht an.

Aufgaben

A114. Gib jeweils an, ob die beiden angegebenen Vektoren gleich sind oder nicht.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ \sqrt{4} \\ 1-1 \end{pmatrix}$

21.2.2 Addition (und Subtraktion)

> Zwei Vektoren werden addiert, indem man ihre jeweiligen Elemente addiert.
>
> $$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Schon bei den Zahlen wurde darauf hingewiesen, dass man jede Subtraktion durch die Addition der entsprechenden negativen Zahl ausdrücken kann. Das gilt natürlich für Vektoren genau so und daher werden Vektoren auch subtrahiert, indem man die einzelnen Elemente voneinander subtrahiert.

Aufgaben

A115. Führe die angegebene Addition oder Subtraktion aus.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

21.2.3 Vorbemerkungen zur Multiplikation

Im Bereich der Vektorrechnung gibt es drei verschiedene Arten von Multiplikationen[4] und gleich soll auch erklärt werden, wie jede von ihnen funktioniert. Die drei Multiplikationen haben die Namen:

1. Multiplikation mit einem Skalar
2. Skalarprodukt
3. Vektorprodukt

In den Namen der Multiplikationen kommt der Begriff 'Skalar' vor, der vermutlich den meisten neu sein dürfte. Der Begriff bezeichnet eigentlich nur eine Zahl, aber damit ist noch nicht geklärt, wieso man außer dem Begriff 'Zahl' noch den Begriff 'Skalar' braucht, wenn beide doch das gleich bezeichnen.

Der Hintergrund liegt darin, dass im Zusammenhang mit Vektoren zwei unterschiedliche Arten von Zahlen gibt, nämlich die Zahlen und die Skalare. Worin besteht der Unterschied?

Ich habe oben schon darauf hingewiesen, dass es Rechnungen gibt, in denen vermischt Vektoren und Zahlen auftauchen[5], was zum Beispiel bedeutet, dass man einen Vektor mit einer Zahl multiplizieren kann[6]. Auf der anderen Seite sind aber die Elemente der Vektoren ebenfalls *Zahlen*, auch wenn denen natürlich eine vollkommen andere Bedeutung zukommt.

> Ein **Skalar** ist eine Zahl, die mit (mindestens) einem Vektor verrechnet wird. Die Elemente der Vektoren heißen weiterhin einfach Zahlen.

21.2.4 Multiplikation mit einem Skalar

> Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem jedes Element des Vektors mit dieser Zahl multipliziert wird.
>
> $$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$
>
> Für diese Multiplikation gilt das Kommutativgesetz, was bedeutet:
>
> $$c \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot c$$
>
> und auch das Distrubutivgesetz:
>
> $$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Auch diese Rechenoperation ist also ziemlich einfach. Übrigens kann so auch ein Vektor durch eine Zahl dividiert werden und zwar ebenfalls wieder genau so, wie wir es von den Zahlen her gewöhnt sind:

$$\vec{a} \div 2 = \vec{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Hier ein paar Beispiele für die Multiplikation mit einem Skalar:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

---

[4] Dafür gibt es keine Division!

[5] Ein Beispiel kommt sofort!

[6] Das ist die erste der oben genannten Multiplikationen

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right] &= 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

A116. Berechne die folgenden Multiplikationen

a)	$4 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	b)	$5 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$	c)	$-1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
d)	$-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\-6\\10\end{pmatrix}$	e)	$2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right]$	f)	$-3\left[\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right]$

21.2.5 Skalarprodukt

Die oben zuerst vorgestellte Multiplikation ist schon ziemlich seltsam, wenn man sich klar macht, dass bei der Multiplikation mit einem Skalar ein *Vektor* mit einem *Skalar* multipliziert wird, also eigentlich zwei 'Dinge', die gar nichts miteinander zu tun haben.

Das Skalarprodukt ist sogar noch ein bisschen seltsamer. Hier werden zwei Vektoren miteinander multipliziert und das Ergebnis ist ein Skalar!

Das mag sehr verwirrend sein, aber diesesProdukt ist mit weitem Abstand das Wichtigste im Zusammenhang mit vektoriellen Rechenoperationen. Nicht nur, dass die meisten der Aufgaben, die im schulischen Umfeld bearbeitet werden, ohne das Skalarprodukt gar nicht zu lösen wären[7], auch Google könnte ohne das Skalarprodukt keine einzige Suchanfrage beantworten[8].

Das Zeichen für diese Art der Multiplikation ist der bekannte Multiplikationspunkt und die Rechnung selber kann sehr einfach durchgeführt werden:

> Für das Skalarprodukt gilt:
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Es werden also einfach die jeweiligen Elemente der beiden Vektoren miteinander multipliziert[9] und die Ergebnisse dann einfach aufaddiert. Ein Beispiel soll das verdeutlichen:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot \frac{1}{2}\\
&= 2 - 6 + 0\\
&= -4
\end{aligned}
$$

Einfach, nicht? Es ist gerade diese Einfachheit in Kombination mit den Interpretationsmöglichkeiten, die das Skalarprodukt so bedeutsam macht — es wird euch sehr oft begegnen.

Aufgaben

A117. Berechne die folgenden Skalarprodukte

a)	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$	b)	$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
c)	$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-17\\20\end{pmatrix}$	d)	$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

7 Weiteres dazu, wenn es um die schulische Interpretation der Vektoren gehen wird.

8 Das nur mal alsBeispiel dafür, dass es auch andere Interpretationen für Vektoren gibt, als die, die in der Schule unterrichtet wird.

9 Zahlmultiplikation!

21.2.6 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt genannt, ist das seltsamste von den Rechenarten bei Vektoren. Es kommt insofern unserer Vorstellung von 'Multiplikation' nach, als es wirklich als Ergebnis auch einen Vektor hat. Es ist also die einzige Multiplikation für die gilt: 'Vektor mal Vektor gleich Vektor'.
Auf der anderen Seite ist es die **einzige** Rechenopertion, die **ausschließlich** für dreidimensionale Vektoren definiert ist und auch nur für diese gilt[10].
Schließlich und endlich ist es komplett überflüssig! Alle Rechnungen, die auf das Vektorprodukt zurück greifen, lassen sich auch ohne dieses Produkt berechnen. Es ist nur in manchen Fällen (deutlich) schneller und wird in NRW nur im Leistungskurs überhaupt unterrichtet. Es wird hier nur der Vollständigkeit halber angeführt.
DasVektorprodukt unterscheidet sich äußerlich vom Skalarprodukt, dass zwischen den Vektoren kein Multiplikationspunkt, sondern ein Multiplikationskreuz[11] geschrieben wird.

Das **Vektorprodukt**, oder **Kreuzprodukt** ist definiert als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

21.2.7 Linearkombination und lineare Abhängigkeit

Die bisherigen Rechenarten sind intuitiv für die meisten kein Problem[12]. Ein bisschen anders sieht das mit der sogenannten 'linearen Abhängigkeit' aus und sie ist auch ein bisschen schwerer zu verstehen und erst recht schwerer nachzuweisen (Siehe unten).
Nach meiner Vorstellung ist es am einfachsten, wenn man sich die lineare Abhängigkeit als den 'kleinen Bruder' der Gleichheit vorstellt. So können zwar Vektoren ungleich sein, aber dennoch linear abhängig und damit so was wie '*ein bisschen*' gleich, aber der Reihe nach.

21.2.7.1 Linearkombination

Der Begriff der Linearkombination ist recht einfach, sie ist einfach eine Kombination von Multiplikation mit einem Skalar und der vektoriellen Addition.
Wenn (beispielsweise) drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben sind, dann ist: $a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}$ eine Linearkombination dieser drei Vektoren, wobei a, b und c einfache Skalare sind.
Ein bisschen konkreter: Angenommen wir hätten die zwei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann man aus diesem beiden Vektoren und zwei Zahlen, die genau so beliebig ausgesucht sind, wie die beiden Vektorengerade, eine Linearkombination 'bauen':

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist der Vektor $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der beiden obigen Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[10] Keine Panik! Weitere Ausnahmen gibt es nicht!

[11] Wie es manchmal auch in der Grundschuleverwendet wird.

[12] Und nun wirklich leicht zu berechnen.

21.2.7.2 Lineare Abhängigkeit

Man nennt eine Gruppe (mindestens zwei) von Vektoren **linear abhängig**, wenn sich jeder der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt, anderenfalls **linear unabhängig**.

Das hört sich erst mal nicht so schlimm an. Außerdem reicht es nachzuweisen, dass sich *irgendeiner* der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt. Es müssen also nicht alle Kombinationen durchprobiert werden. Außerdem gibt es noch eine Alternative, die in der Regel einfacher zu bearbeiten ist.
Angenommen wir hätten drei Vektoren '$\vec{a}$', '$\vec{b}$' und '$\vec{c}$' und wollten nachweisen, ob diese drei Vektoren linear abhängig sind oder nicht. Dann müssten wir zum Beispiel nachweisen, dass sich '$\vec{c}$'[13] als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen lässt, ob sich Zahlen 'a' und 'b' finden lassen für die gilt: $\vec{c} = a\vec{a} + b\vec{b}$.
Man kann aber genauso gut untersuchen, ob die Gleichung[14] $a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c} = \vec{0}$ nur die Lösung $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$ hat, was immer der Fall ist, wie man sich leicht klar machen kann, oder ob es auch noch andere Lösungen gibt. Im ersten Falle wären die Vektoren linear unabhängig, im zweiten Fall linear abhängig.
Es gilt also auch:

Hat die Gleichung
$$a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c} = \vec{0}$$
nur die Lösung $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$, dann sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig, ansonsten linear abhängig.

Beispiel linear abhängiger Vektoren

Das hört sich alles ziemlich kompliziert an und sollte daher durch ein paar Beispiele erläutert werden. Fangen wir mit drei linear abhängigen Vektoren an:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

iNach dem ersten Verfahren könnte man nun untersuchen, ob sich der Vektor '$\vec{c}$' als Linearkombination der beiden anderen schreiben lässt. Dazu muss man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lösen lässt oder nicht. Es handelt sich hier um ein überbestimmtes Gleichungssystem, da es eine Gleichung mehr hat als Variablen. Ein solches Gleichungssystem untersucht man, indem man erst einmal eine der Gleichungen weglässt, das verkleinerte Gleichungssystem löst und dann schaut, ob die Lösung auch für die weggelassene Gleichung richtig ist:

$$\begin{array}{rrcl} I & -4 & = & a + 2b \\ II & 4 & = & 2a \end{array}$$

AUs der zweiten Gleichung erkennt man sofort, dass $a = 2$ sein muss. Setzt man das in die erste Gleichung ein, ergibt sich: $b = -3$. Nun muss noch geprüft werden, ob diese beiden Zahlen auch für die jeweils dritten Elemente richtig ist. Da gilt allerdings: $-9 = 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)$, was offenbar richtig ist. Wir haben nachgewiesen, dass die drei Vektoren wirklich linear abhängig sind.
Nach der zweiten Methode sieht das Gleichungssystem ein bisschen anders aus:

$$a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c} = \vec{0}$$

[13] Ich hätte genau so gut einen der beiden anderen Vektoren nehmen können.

[14] Sie entsteht im Wesentlichen dadurch, dass man den Vektor $\vec{c}$ einfach auf die andere Seite der Gleichung holt. Das erklärt allerdings noch nicht die Skalarvariable 'c' — das würde hier aber zu weit führen.

schreibt sich als Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} I & a+2b-4c & = & 0 \\ II & 2a+4c & = & 0 \\ III & 3b-9c & = & 0 \\[1ex] I & 2b-6c & = & 0 \\ II & a & = & -2c \\ III & 3b-9c & = & 0 \\[1ex] I & b & = & 3c \\ II & a & = & -2c \\ III & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die letzte Zeile zeigt, dass das Gleichungssystem unendlichviele Lösungen hat und nicht nur die Lösung $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$. Die Vektoren sind also auch nach dieser Methode linear abhängig.

Beispiel linear unabhängiger Vektoren

Nun das Ganze noch mal für den Fall, dass die Vektoren nicht linear abhängig sind. Ich nehme wieder drei dredimensionale Vektoren, weil dass im schulischen Bereich der Normalfall ist[15]. Nun sollen es die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sein.

Nach der ersten Methode ergibt sich nun, wenn man wieder '$\vec{c}$' durch die anderen darstellen will:

$$\begin{array}{lcll} I & 4 & = & a+2b \\ II & 4 & = & 2a \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung erkennt man sofort, dass $a = 2$ sein muss. Setzt man das in die erste Gleichung ein, erhält man $b = 1$. Setzt man diese Werte aber nun in die dritte Gleichung ein, dann ergibt sich: $2 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, was offenkundig falsch ist. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Und auch die zweite Methode führt zum Erfolg:

$$\begin{array}{lrcl} I & a+2b+4c & = & 0 \\ II & 2a+4c & = & 0 \\ III & 3b+2c & = & 0 \\[1ex] I & 2b+2c & = & 0 \\ II & a & = & -2c \\ III & 3b+2c & = & 0 \\[1ex] I & b & = & -c \\ II & a & = & -2c \\ III & c & = & 0 \end{array}$$

Setzt man das Ergebnis der dritten Zeile in die beiden anderen Zeilen ein, dann ergibt sich tatsächlich, dass $a = 0$, $b = 0$ und auch $c = 0$ sein müssen. Auch nach dieser Methode sind die Vektoren linear unbahängig.

Aufgaben

A118. Untersuche die folgenden Vektorengruppen auf lineare Abhängigkeit.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \text{c)} & \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 29 \end{pmatrix} & \text{d)} & \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

[15] Aber auch für die lineare Abhängigkeit gilt, dass sie für jede Dimension bei den Vektoren in ihrer Art gleich ist.

21.2.7.3 Lineare Abhängigkeit bei zwei Vektoren

Will man nur zwei Vektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen, dann ist die Sache sehr einfach. Wenn man sehen will, ob sich etwa der Vektor'$\vec{a}$' als Linearkombination des Vektors '$\vec{b}$' schreiben lässt[16], dann lautet die zugehörige Gleichung:

$$\vec{a} = b\vec{b}$$

Die ganze Frage nach der linearen Abhängigkeit reduziert sich also auf die Frage, ob '$\vec{a}$' ein Vielfaches des Vektors '$\vec{b}$' ist. Etwas, was man meist durch bloßes Hinsehen entscheiden kann.

> **Zwei** Vektoren sind dann linear abhängig, wenn der eine ein Vilefaches des anderen ist.

21.3 Fachbegriffe

Dimension eines Vektors
: Die Anzahl der Elemente in einem Vektor wird Dimension des Vektors genannt.

Elemente eines Vektors
: Ein Vektor besteht aus der Zusammenfassung mehrerer 'Elemente'. Dies sind im schulischen Umfeld zumeist Zahlen, es können allerdings auch manchmal Terme sein.

Kreuzprodukt
: Eine besondere Form der Multiplikation zweier Vektoren, die wiederum einen Vektor als Ergebnis hat. Dieser Ergebnisvektor steht auf den beiden Ausgangsvektoren senkrecht.

Multiplikation mit einem Skalar
: Eine der Multiplikationen, die für Vektoren definiert sind. Hier wird einfach ein Vektor mit einer Zahl (Skalar) multipliziert.

Nullvektor
: Ein Vektor dessen Elemente alle ausnahmslos Null sind.

Skalarprodukt
: Eine für Vektoren definierte Multiplikation, bei der das Ergebnis eine Zahl (Skalar) ist.

Vektor
: Eine Zusammenfassung mehrerer Elemente (in der Regel Zahlen). Bei diesen Elementen kommt es auf die Reihenfolge an und mit ihnen wird in der Regel immer gleichzeitig gerechnet.

Vektorprodukt
: Anderer Name für Kreuzprodukt.

[16] 1. Methode!

22 Punkt, Gerade, Ebene

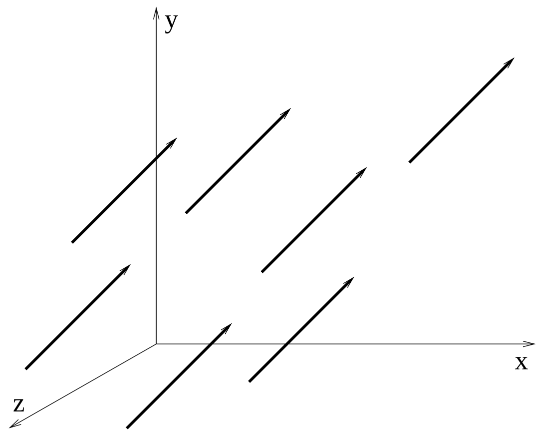
Nachdem bis hier die Rechenarten für Vektoren erklärt wurden, sollen nun die (wesentlichen) geometrischen Interpretationen für Vektoren vorgestellt werden, wie sie im Schulunterricht vorkommen. Es sei aber dennoch noch einmal darauf hingewiesen, dass dies nur **eine** mögliche Interpretation von Vektoren ist und auch gänzlich andere möglich und üblich sind.

22.1 Der Pfeil

Die grundlegende Interpretation eines Vektors ist die eines **Pfeils**.

$$\longrightarrow$$

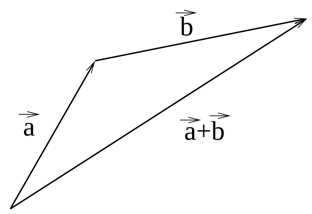
Ein solcher Pfeil hat drei Charakeristika: eine **Länge**, eine **Richtung** und eine **Orientierung**. Die Länge dürfte selbsterklärend sein. Die Richtung eines Vektors beschreibt die Lage des Pfeils (im Koordinatensystem), also sein 'Aussehen' ohne Berücksichtigung der Pfeilspitze. So ist die Richtung des oben dargestellten Pfeils die Waagerechte. Die Orientierung gibt dann noch zusätzlich wohin der Pfeil zeigt, im obigen Falle nach rechts.
Grundsätzlich werden dabei zwei Arten von Pfeilen/Vektoren unterschieden: Zum einen die, bei denen der Anfangspunkt nicht festgelegt ist. Man kann sich diese Vektoren auch gut als Bewegung vorstellen. So bedeutet der oben dargestellte Vektor eine Bewegung um die Länge des Vektors nach rechts, wobei das unabhängig davon ist, wo der Startpunkt liegt. So zeigt die folgende Abbildung mehrere Darstellungen ein und desselben Vektors[1].



22.1.1 Rechnen und Pfeile

22.1.1.1 Addition

Addiert man zwei Vektoren, die beide durch Pfeile repräsentiert werden, dann erhält man einen Vektor, der ebenfalls einen Pfeil repräsentiert.
Der geometrische Zusammenhang dieser drei Pfeile lässt sich folgendermaßen beschreiben: Hängt man an die Pfeilspitze des ersten Summandenvektors den Anfangspunkt des zweiten Summandenvektors, dann ist der Pfeil, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt (Pfeilspitze) des zweiten führt der Summenvektor.

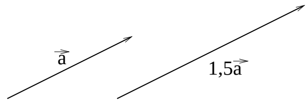


Stellt man sich die Pfeile als (Aufforderung zu) Bewegungen vor, dann entspricht die Addition der Hintereinanderausführung von zwei dieser Bewegungen.

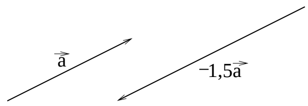
[1] Es ist übrigens ein sehr schönes Beispiel für eine optische Täuschung, dass die Pfeile nicht parallel aussehen. Sie sind es aber!

22.1.1.2 Multiplikation mit einem Skalar

Multipliziert man einen Vektor mit einer Zahl, dann verändert sich die Länge des zugehörigen Pfeils um den entsprechenden Faktor. Wird ein Vektor etwa mit 2 multipliziert, dann bleiben Richtung und Orientierung des Pfeils gleich, seine Länge allerdings verdoppelt sich.



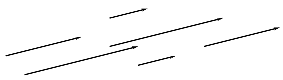
Wird ein Vektor mit einer negativen Zahl multipliziert, dann dreht sich außerdem seine Orientierung um.

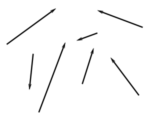


ParagraphLineare Abhängigkeit Vereinfacht gesprochen bedeutet die lineare Abhängigkeit einer Gruppe von Vektoren, dass diese Vektoren eine räumliche Dimension weniger in Anspruch nehmen, als sie es gemeinsam könnten.

Zwei linear abhängige Vektoren

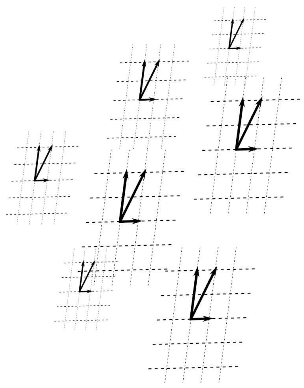
Angenommen schon eine Gruppe aus zwei Vektoren wäre linear abhängig[2]. Dann bedeutet dies, dass sie parallel sind, genauer **kollinear**, da man den Begriff 'parallel' eher im Zweidimensionalen verwendet.
Mit zwei Vektoren *könnte* man ein zweidimensionales Feld abdecken, mit den linear abhängigen aber nicht. Würde man die beiden an einen 'Aufhängungspunkt' im Koordinatensystem beginnen lassen, dann lägen beide Vektoren auf einer (eindimensionalen) Linie, sie haben beide die gleiche Richtung.

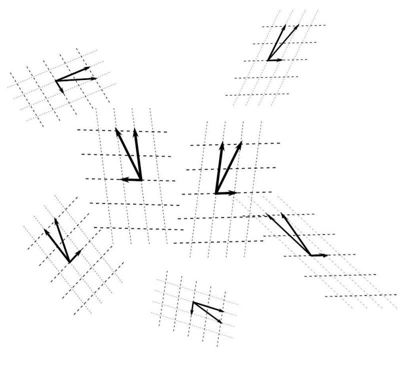

Pfeile kollinearer, linear abhängiger Vektoren


Pfeile linear unabhängiger Vektoren

Mehrere linear abhängige Vektoren

Im Rahmen der schulischen Überlegungen zu Vektoren, ist auch die Frage interessant, wie es aussieht, wenn drei Vektoren linear unabhängig sind. Das lässt sich für den Fall dreidimensionaler Vektoren auch angeben.
Drei dreidimensionale Vektoren könnten so geartet sein, dass man drei Dimensionen, also Platz und nicht Fläche brauchte, um sie darzustellen. Sind die Vektoren allerdings linear abhängig, dann erreichen sie nur eine Dimension weniger, können also auch in einer Fläche (zweidimensional) dargestellt werden.


Pfeile linear abhängiger, konplanarer Vektoren


Pfeiler linear unabhängiger Vektoren

Man nennt die Eigenschaft der drei Vektoren **konplanar**.

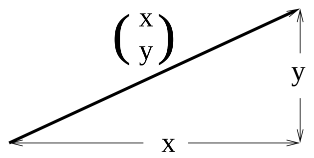
[2] Wir erinnern uns: Das ist leichtzu erkennen, denn der eine ist ein Vielfaches des anderen!

22.1.1.3 Pfeile und das Skalarprodukt

Versteht man Vektoren als Pfeile, dann gewinnt das Skalarprodukt mehrere ganz besondere Bedeutungen, die sehr oft gebraucht werden.

Länge eines Pfeils

Betrachtet man einen zweidimensionalen Pfeil und den dazu gehörigen zweidimensionalen Vektor, dann beschreibt das erste Element des Vektors wieviele Einheiten der Anfangspunkt des Vektors horizontal von seiner Pfeilspitze entfernt ist. Entsprechend gibt das zweite Element den vertikalen Abstand an.



Nun kann die Länge des Pfeils[3] einfach mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die von den Zahlen her bekannten Betragsstriche dienen bei Vektoren dazu, deren Länge zu bezeichnen.
Den Ausdruck ’$x^2 + y^2$ erhält man bei Vektoren einfach dadurch, dass man einen Vektor mit sich selbst skalar multipliziert und damit kann man einfach angeben, wie sich die Länge eines (beliebigen) Vektors berechnen lässt[4]:

> Die Länge eines Vektors/Pfeils berechnet man mit:
>
> $$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Aufgaben

A119. Berechne die Länge der folgenden Vektoren

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Vektoren

Aber auch dann, wenn man nicht einen Vektor mit sich selbst, sondern zwei Vektoren miteinander skalar multipliziert, hat das Ergebnis etwas mit den zugehörigen Pfeilen zu tun, genauer mit dem Winkel zwischen den beiden Pfeilen. Es gilt:

> Man kann das Skalarprodukt auch berechnen zu
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$
>
> Dabei ist ’α’ der Winkel zwischen den beiden zu den Vektoren gehörigen Pfeilen.

Man kann diesen Umstand in zweifacher Hinsicht verwenden. Zum einen kann mit der obigen Gleichung der Winkel zwischen zwei Pfeilen/Vektoren berechnet werden, wie man mit einem Beispiel leicht sehen kann.

[3] Manchmal sagt man der Einfachheit halber auch: Länge des Vektors.

[4] Für höhere als zwei Dimensionen, etwa drei, kann man sich klar machen, dass das Verfahren genau so funktioniert.

Angenommen man hätte die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für ihre Längen gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

und damit ist:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha \\ -1 &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha \\ \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} &= \cos\alpha \\ 98,1^\circ &\approx \alpha \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dazu die Umkehrfunktion des Cosinus, der sogenannte Arcuscosinus verwendet. Auf vielen Taschenrechnern wird er mit '$\cos^{-1}$' bezeichnet und liegt zumeist auf der gleichen Taste wie der Cosinus[5].

Aufgaben

A120. Berechne jeweils den Winkel zwischen den beiden angegebenen Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der zweite wichtige Aspekt, der sich aus der obigen Gleichung für das Skalarprodukt ergibt folgt aus der Gleichung:

$$\cos 90^\circ = 0$$

denn damit ist:

> Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren Null, gilt also
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
>
> dann stehen die zugehörigen Pfeile der Vektoren senkrecht aufeinander, sie sind **orthogonal**.
> Daraus folgt, dass der Nullvektor auf allen anderen Vektoren senkrecht steht.

22.1.2 Normalenvektor

> Ein Vektor, der zu einem oder mehreren anderen Vektoren senkrecht steht, heißt **Normalenvektor** dieses oder dieser anderen Vektoren.

Die Eigenschaft Normalenvektor zu sein, kann leicht nachgewiesen werden, denn das Skalarprodukt des Normalenvektors mit den anderen muss immer Null ergeben.
So ist etwa der Vektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[5] Dann mit einer Shift-Taste oder ähnlichem.

Normalenvektor der Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

denn es ist:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= 2\cdot 1 + 5\cdot 2 + (-4)\cdot 3 \\
&= 2 + 10 - 12 \\
&= 0 \\
\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} &= 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \\
&= 4 + 0 - 4 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist es zu gegebenen Vektoren einen Normalenvektor zu ermitteln. Hierfür stehen zwei Verfahren zur Verfügung:

Mit einem Gleichungssystem

Angenommen man wollte zu den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

einen Normalenvektor bestimmen, dann lässt man deren Elemente zunächst unbestimmt und schreibt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

Da man ja weiß, dass $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ und auch $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sein muss, erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1\cdot n_1 + 1\cdot n_2 + 2\cdot n_3 &= 0 \\
-1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + 3\cdot n_3 &= 0
\end{aligned}$$

Das ist ein unterbestimmtes Gleichungssystem
Unterbestimmte Gleichungssystem haben, wenn sie nicht unlösbar sind, immer unendlich viele Lösungen. Um **eine** Lösung von denen zu ermitteln, kann man sich den Wert von so vielen Variablen aussuchen, bis nur noch so viele übrig sind, dass das Gleichungssystem quadratisch wird.
Im vorliegenden Beispiel kann man sich daher den Wert **einer** Variablen aussuchen, etwa $n_3 = 6$, dann wird aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1\cdot n_1 + 1\cdot n_2 &= -12 \\
-1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 &= -18
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $n_1 = -2$ und $n_2 = -10$.
Damit sind alle Elemente des Normalenvektors bestimmt und es ist:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\-10\\6\end{pmatrix}$$

Es ist klar, dass die Lösung nicht eindeutig sein kann. Denn wenn ein Vektor Normalenvektor von anderen Vektoren ist, dann ist auch jedes Vielfache dieses Vektors Normalenvektor dieser Vektoren. Die Länge eines Vektors beeinflusst ja nicht seine Winkel zu den anderen Vektoren.

Mit dem Vektorprodukt

Das Vektor- oder Kreuzprodukt zweier Vektoren liefert immer einen Normalenvektor dieser beiden Vektoren[6].
Für die beiden obigen Vektoren gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und man sieht leicht, dass dieses Ergebnis das Doppelte des oben berechneten Normalenvektors ist und das ist natürlich auch ein Normalenvektor.

Aufgaben

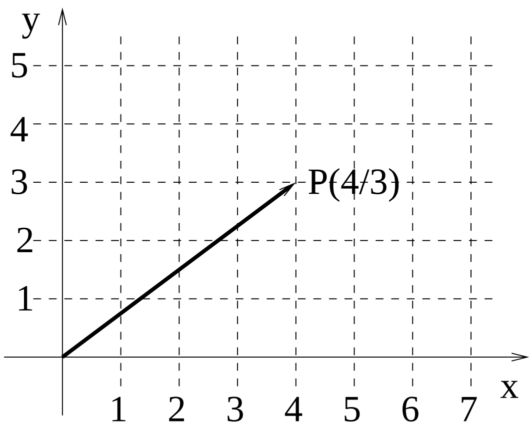
A121. Bestimme zu den gegebenen Vektoren einen Normalenvektor

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

22.2 Der Punkt

Bei der zweiten Art von Vektoren wird davon ausgegangen, dass der Anfangspunkt des Vektors mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen fällt. Man nennt diese Art von Vektoren: **Ortsvektor**! Sie beginnen, wie gesagt, im Koordinatenursprung und ihre Pfeilspitze liegt dabei auf einem **Punkt**.



Im obigen Bild ist der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dargestellt, der den Punkt $P(4/3)$ beschreibt.

Man mache sich dabei unbedingt klar, dass es einen Unterschied zwischen dem Vektor und dem Punkt gibt, auch wenn die Elemente des Vektors gleich den Koordinaten des Punktes sind. Der Unterschied besteht darin, dass der gleiche Vektor, wenn er **nicht** als Ortsvektor *interpretiert* wird, auch eine Bewegung um vier Einheiten nach rechts und drei nach oben bedeuten kann.
Aber mit der Vorstellung des Vektors als Ortsvektor, ist auch schon das erste geometrische 'Objekt' gegeben:

6 Tatsächlich wird das Vektorprodukt auch nur dazu verwendet. Man kann sich darüber streiten, ob der geringe Zeitvorteil bei der Ermittlung eines Normalenvektors mit dem Vektorprodukt gegenüber der Methode mit einem Gleichungssystem ausreicht eine weitere Rechenmethode einzuführen und zu lernen. Im Leistungskurs wird es aber verlangt.

Bei der Interpretaion eines Vektors als **Ortsvektor** wird davon ausgegangen, dass der Anfangspunkt des zugehörigen Pfeils im Koordinatenursprung liegt und die Pfeilspitze des Pfeils einen **Punkt** beschreibt.
Dabei beschreibt der Vektor

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

den Punkt

$$P(x_0/y_0/z_0)$$

22.2.1 Zur Dimensionalität

Im obigen Beispiel hatte der Vektor zwei Elemente[7] und beschrieb einen Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem. In der gerade gegebenen Definition eines Ortsvektors hatte der Vektor drei Elemente und der zugehörige Punkt läge in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.
ES gehört zu den großen Vorteilen der Vektoren, dass ihre Regeln unabhängig von der Dimension sind. Analog zu der obigen Definition hätte man auch schreiben können, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

den Punkt

$$P(x_1/x_2/\dots/x_n)$$

in einem n-dimensionalen Koordinatensystem beschreibt.
Im schulischen Umfeld werden die meisten Vektoren dreidimensional sein und daher auch die meisten der Beispiele oder Aufgaben mit dreidimensionalen Vektoren formuliert sein. Nur wo es der Anschaulichkeit dient, werden auch zweidimensionale Vektoren zum Zuge kommen[8].

22.3 Die Gerade

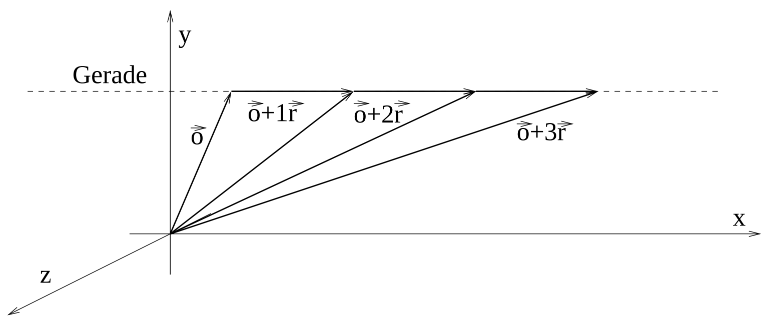
Um mit Vektoren eine Gerade beschreiben zu können, braucht man **zwei** Vektoren, einen Ortsvektor, der **einen** Punkt der Geraden festlegt und einen **Richtungsvektor**.

Durch die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{o} + r \cdot \vec{r}$$

wird eine **Gerade** beschrieben.
$\vec{o}$ ist dabei der **Ortsvektor** der Geraden und $\vec{r}$ ihr **Richtungsvektor**.

Die Vorstellung dahinter besagt, dass man alle Punkte der Geraden erhält, wenn der Faktor 'r' vor dem Richtungsvektor alle Zahlen durchläuft.



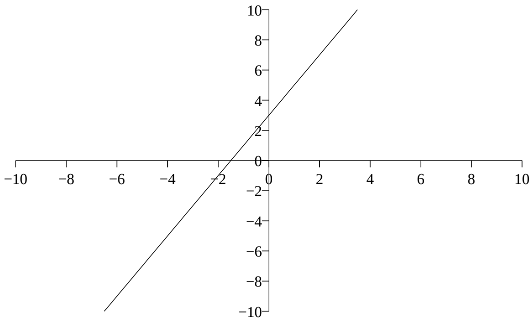
7 Hatte also die Dimension 2.

8 Die Dreidimensionalität stellt zugleich die größte Hürde für die meisten Lernenden dar, weil sie das dreidimensionale Vorstellungsvermögen fordert. Man kann sich allerdings oftmals mit Stiften oder Mikadostäben leicht ein Bild machen.

Gefällt einem die Vorstellung des Vektors als Bewegung besser, dann kann man sich vorstellen, dass man zunächst vom Ursprung des Koordinatensystems den Ortsvektor entlang geht und dann beliebig oft den Richtungsvektor in die eine oder andere Orientierung.

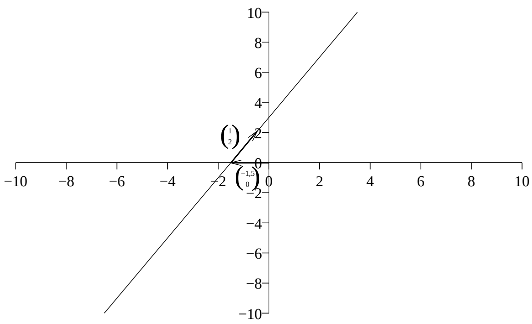
22.3.1 Zur Eindeutigkeit

Im Bereich der Analysis werden Geraden durch lineare Funktionen bestimmt und die lassen sich immer in die Form $f(x) = m \cdot x + n$ bringen, wobei 'm' und 'n' eine eindeutige Bedeutung haben[9]. Diese Eindeutigkeit gibt es bei der Darstellung einer Geraden mittels Vektoren **nicht**! Betrachten wir die Gerade, die mit der Funktion $f(x) = 2x + 3$ beschrieben wird:



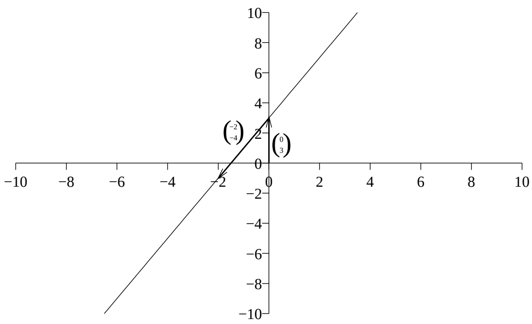
Will man genau die gleiche Gerade mit Vektoren darstellen, dann kann man das tun mit der (vektoriellen) Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Man bekommt aber die gleiche Gerade auch durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



22.4 Ebenen

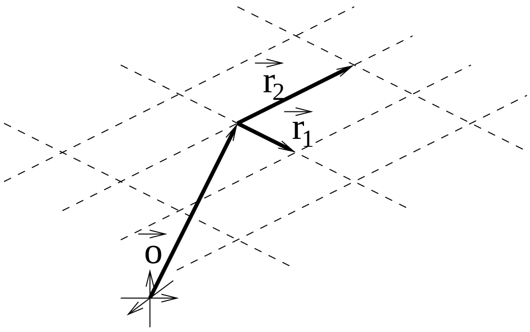
[9] Steigung und y-Achsen-Abschnitt.

22.4.1 Die Parameterform der Ebenengleichung

Eine Ebene wird mit Vektoren durch einen Ortsvektor und zwei Richtungsvektoren, die nicht linear abhängig sein dürfen, beschrieben:

> Durch die Gleichung
> $$\vec{x} = \vec{o} + r \cdot \vec{r_1} + s \cdot \vec{r_2}$$
> wird eine **Ebene** beschrieben.
> $\vec{o}$ ist dabei der **Ortsvektor** der Ebene und $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ ihre **Richtungsvektoren**.

Die damit verbundene Vorstellung entspricht der bei der Geradengleichung. Entlang des Ortsvektors gelangt man zu **einem** Punkt der Ebene und von dort aus kann dann beliebig oft (r und s mal) einer der beiden oder beide Richtungsvektoren entlang gegangen werden, um die anderen Punkte der Ebene zu erreichen.



Wie auch schon bei den Geraden ist die Darstellung der Ebene mit Vektoren **nicht** eindeutig.

22.4.2 Die Normalenform der Ebenengleichung

Multipliziert man eine Ebenengleichung in Parameterform, etwa

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

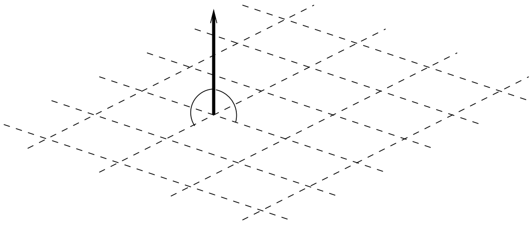
mit einem Normalenvektor (hier zum Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$) der beiden Richtungsvektoren, erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= 7 + r \cdot 0 + s \cdot 0 \\
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= 7
\end{aligned}$$

Subtrahiert man nun noch auf beiden Seiten der letzten Gleichung die '7', dann erhält man

> Die **Normalenform** einer Ebenengleichung hat die Form
> $$\vec{x} \cdot \vec{n} - a = 0$$
> wobei '$\vec{n}$' ein Normalenvektor der Ebene und 'a' eine Zahl ist.

Anschaulich kann man sich diese Form der Ebenengleichung folgendermaßen vorstellen: In dem Wert von 'a' steckt ja der Ortsvektor[10] Denkt man sich nun den Normalenvektor der Ebene als beim Punkt des Ortsvektors beginnend, dann erhält man alle anderen Punkte der Ebene, indem man von diesem Punkt aus beliebig, aber senkrecht zum Normalenvektor geht.



22.4.3 Die Koordinatenform der Ebenengleichung

Im letzten Beispiel tauchte die Gleichung

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 7$$

auf. Schreibt man den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und multipliziert auch noch die linke Seite aus, dann erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= 7 \\ 2x + 4y - z &= 7 \end{aligned}$$

Man nennt diese Form der Ebenengleichung die **Koordinatenform** der Ebenengleichung. Allgemein gilt:

> Sind a, b, c und d Zahlen, dann ist
>
> $$ax + by + cz = d$$
>
> eine Koordinatenform der Ebenengleichung.

Mit dieser Form lassen sich schnell Punkte der Ebene berechnen. Man wählt einfach für zwei der Variablen Werte und berechnet dann den dritten.
Wählt man etwa in der obigen Gleichung: $2x + 4y - z = 7$ für $x = 1$ und $y = 2$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - z &= 7 \\ 2 + 8 - z &= 7 \\ -z &= -3 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Der Punkt $P(1/2/3)$ liegt also in der Ebene[11].

22.5 Fachbegriffe

Ebene

Eine Ebene ist eine (gerade) zweidimensionale Fläche (im Raum). Sie kann mit der Parameterform, der Normalenform oder der Koordinatenform angegeben werden.

[10] So entstand etwa die '7' in obigem Beispiel dadurch, dass der Ortsvektor mit dem Normalenvektor multipliziert wurde.

[11] Außer für diese Berechnung kenne ich allerdings keinen Vorteil der Koordinanteform.

Gerade

Eine Gerade ist eine (gerade) eindimensionale Linie im Raum. Sie wird durch eine Geradengleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{o} + r \cdot \vec{r}$$

festgelegt.

Kollinear

Zwei Vektoren sind kollinear, wenn sie linear abhängig sind (Vielfache voneinander). Ihre zugehörigen Pfeile ließen sich auf **einer** Linie zeichnen.

Koordinantenform

Die Koordinatenform der Ebenegleichung hat die Form:

$$ax + bz + cy = d$$

Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors wird durch Betragsstriche angezeigt.
Sie kann berechnet werden mit:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Normalenform

Die Normalenform der Ebenengleichung hat die Form:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} - a = 0$$

Normalenvektor

Ein Vektor ist Normalenvektor eines anderen Vektors, wenn er senkrecht auf diesem steht. Damit sind diese beiden Vektoren gegenseitig Normalenvektoren.

Orthogonal

Orthogonal sind zwei Vektoren, wenn sie senkrecht aufeinander stehen. Ihr Skalarprodukt ist Null!

Ortsvektor

Ein Ortsvektor ist ein Vektor bei dem davon ausgegangen wird, dass er im Ursprung des Koordinatensystems beginnt. Seine Pfeilspitze betimmt dann einen Punkt.

Parameterform

DieParameterform der Ebenengleichung hat die Form

$$\vec{x} = \vec{o} + r \cdot \vec{r_1} + s \cdot \vec{r_2}$$

Pfeil

Ein Pfeil ist eine Veranschaulichung, Interpretation eines Vektors.

Punkt

Ein Punkt ist ein bestimmter Ort im Kooridnatensystem. Er kann durch seine Koordinaten ($P(x/y/z)$) oder durch seinen Ortsvektor ($\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) angegeben werden.

Richtungsvektor

Ein Richtungsvektor gibt an in welche Richtung, ausgehend von einem Punkt, sich eine Gerade (ein Richtungsvektor) oder eine Ebene (zwei Richtungsvektoren) erstreckt.

Winkel zwischen Vektoren

Der Winkel zwischen zwei Vektoren, genauer zwischen den sie repräsentierenden Pfeilen kann mit der Formel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

berechnet werden.

Keine Panik!

23 Gegenseitige Lage

23.1 Generelles

Im letzten Kapitel wurden die (wesentlichen) Elemente vorgestellt, die im Bereich der analytischen Geometrie in der Schule vorkommen: Punkt, Gerade und Ebene.
Im vorliegenden Kapitel soll nun ein weiterer wichtiger Aspekt der schulischen analytischen Geometrie behandelt werden, die gegenseitige Lage.

	Punkt	**Gerade**	**Ebene**
Punkt	$\star$	$\star$	$\star$
Gerade		$\star$	$\star$
Ebene			$\star$

Wie man der obigen Tabelle entnehmen kann sind insgesamt sechs Betrachtungen solcher gegenseitigen Lagen denkba. Man sollte sich aber klar machen, dass das grundsätzliche Vorgehen in allen sechs Fällen absolut gleich ist. In jedem Fall setzt man:

$$\text{Objekt} = \text{Objekt}$$

Das ergibt immer ein lineares Gleichungssystem, welches keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat. Aus der **Interpretation** dieser Lösung[1] ergibt sich dann die gegenseite Lage der beiden Objekte.

23.2 Punkt und

23.2.1 Punkt und Punkt

Zwei Punkte können gleich sein, oder sie sind es nicht. Andere gegenseitige Beziehungen kann es zwischen zwei Punkten nicht geben. Da Punkte in der analytischen Geometrie durch ihre Ortsvektoren beschrieben werden, müssen also diese gleich gesetzt werden. Das ergibt ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und Null Unbekannten. Sind alle drei Gleichungen wahr, dann sind die Punkte gleich, ist auch nur eine unwahr, dann sind die Punkte unterschiedlich.
Das hört sich nun ziemlich kompliziert und aufwändig an, aber wenn man es durchführt, ergibt sich:

> Zwei Punkte sind dann gleich, wenn ihre Ortsvektoren gleich sind, ansonsten ungleich.

23.2.2 Punkt und Gerade

Ein Punkt kann auf einer Geraden liegen, oder er liegt nicht auf der Geraden. Anderen Beziehungen sind nicht möglich.

> Setzt man einen Punkt und eine Gerade gleich, ergibt sich ein LGS mit drei Gleichungen und einer Variablen.
> Ist das Gleichungssystem lösbar, dann liegt der Punkt auf der Geraden, ist es unlösbar, liegt er nicht auf der Geraden.

Hierzu zwei Beispiele:
Liegt der Punkt $P(1/2/3)$ auf der Geraden mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[1] Oder der Form der Lösung

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} I & 1 & = & 1+2r \\ II & 2 & = & 2+r \\ III & 3 & = & 3r \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort, dass diese nur erfüllt sein kann, wenn $r = 1$ ist. Setzt man diesen Wert zunächst in die erste Gleichung ein, erhält man:

$$1 = 1 + 2 \cdot 1$$

was offensichtlich falsch ist. Das Gleichungssystem hat keine Lösung, der Punkt liegt nicht auf der Geraden.
Und nun die Frage, ob der Punkt $Q(-3/0/-6)$ auf der obigen Geraden liegt. Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} I & -3 & = & 1+2r \\ II & 0 & = & 2+r \\ III & -6 & = & 3r \end{array}$$

Auch hier erkennt man an der dritten Gleichung[2], dass $r = -2$ sein müsste.
Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, erhält man: $-3 = 1 + 2 \cdot (-2)$, was zu $-3 = -3$ umgeformt werden kann, also richtig ist. In die zweite Gleichungs eingesetzt bekommt man: $0 = 2 + (-2)$, was auch offenbar richtig ist.
Alle drei Gleichungen sind also für $r = -2$ wahr, der Punkt liegt auf der Geraden.

Aufgaben

A122. Untersuche jeweils, ob der angegebene Punkt auf der angegebenen Geraden liegt.

a) $P(7/2/11) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $P(3/0/1) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

23.2.3 Punkt und Ebene

Ein Punkt kann auch nur in der Ebene liegen oder außerhalb, daher gilt:

> Setzt man den Ortsvektor eines Punktes gleich einer Ebenengleichung, dann erhält man ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Variablen.
> Ist dieses Gleichungssystem lösbar, dann liegt der Punkt in der Ebene, ist es unlösbar, liegt er nicht in der Ebene.

Auch hierzu zwei Beispiele:
Gegeben ist eine Ebene durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Liegt der Punkt $P(-4/-6/-2)$ in der Ebene? Setzt man den Ortsvektor gleich der Ebene, erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} I & -4 & = & 1-r+s \\ II & -6 & = & 3s \\ III & -2 & = & -2+2r+3s \end{array}$$

[2] Was an der Geradengleichung liegt, bei einer anderen Geradengleichung könnte die einfachste auch die erste oder zweite Gleichung sein.

Hier sieht man an der zweiten Gleichung sofort, dass $s = -2$ sein muss. Setzt man das in die erste Gleichung ein, erhält man:

$$\begin{aligned} -4 &= 1 - r - 2 \\ -3 &= -r \\ 3 &= r \end{aligned}$$

Nun muss man noch überprüfen, ob mit den gefundenen beiden Werten auch die dritte Gleichung wahr wird:

$$\begin{aligned} -2 &= -2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \\ -2 &= -2 + 6 - 6 \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

Auch die dritte Gleichung wird wahr. Da alle drei Gleichungen für $r = 3$ und $s = -2$ wahr werden, hat das Gleichungssystem eine Lösung, der Punkt liegt in der Ebene.
Nun die Frage, ob auch der Punkt $Q(2/6/8)$ in der Ebene liegt.

$$\begin{array}{ccccc} I & 2 & = & 1 - r + s \\ II & 6 & = & 3s \\ III & 8 & = & -2 + 2r + 3s \end{array}$$

Aus II sieht man, dass $s = 2$ sein muss, und wenn man das in I einsetzt, erhält man $r = 1$. Setzt man diese beiden Werte in die dritte Gleichung ein, erhält man"

$$\begin{aligned} 8 &= -2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 8 &= -2 + 2 + 6 \\ 8 &= 6 \end{aligned}$$

Was offenbar falsch ist. Das Gleichungssystem hat keine Lösung, daher liegt der Punkt nicht in der Ebene.

Aufgaben

A123. Gegeben ist die Ebene durch die Gleichung

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Untersuche rechnerisch, ob die Punkte $A(0/5/6)$, $B(1/7/5)$, $C(6/9/20)$ oder $D(-9/43/17)$ in der Ebene liegen.

23.2.3.1 Bei den anderen Ebenengleichungen

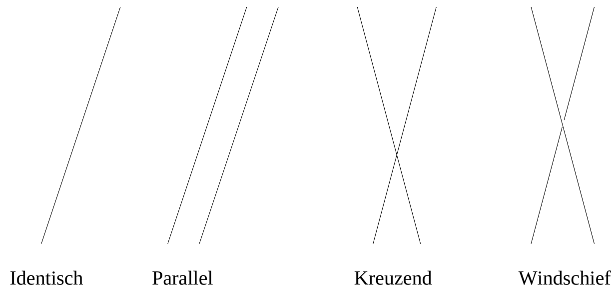
Will man wissen, ob sich ein Punkt in einer Ebene befindet, die durch eine Normalenforme gegeben ist, dann setzt man nur den Ortsvektor des Punktes an Stelle des '$\vec{x}$' der Ebenengleichung ein. Ergibt sich dann eine wahre Aussage, liegt der Punkt in der Ebene, wird es eine falsche Aussage, liegt der Punkt nicht in der Ebene.
Wenn die Ebene durch die Koordinatenform der Ebenengleichung gegeben ist, setzt man die Koordinaten des Punktes in die Koordinatenvariablen (x, y und z) der Ebenengleichung ein. Ergibt sich eine wahre Aussage, liegt der Punkt in der Ebene, anderenfalls nicht.

23.3 Gerade und

23.3.1 Gerade und Gerade

So seltsam es anmuten mag, aber die gegenseitige Lage von zwei Geraden ist der komplizierteste Fall, der in der analytischen Geometrie vorkommt. Der Grund dafür liegt darin, dass es nur in diesem Fall vorkommt, dass die Interpretation der Lösung des Gleichungssystems, dass entsteht, wenn man die Gleichungen von zwei Geraden gleich setzt, nicht ausreichen **kann**, um die gewünschte Antwort zu finden.

23.3.1.1 Die unterschiedlichen Lagebeziehungen



Die Schwierigkeit, die sich manchmal ergibt, besteht darin, dass es einigen Leuten schwer fällt sich Geraden im dreidimensionalen Raum *vorzustellen*. Im Gegensatz zum zweidimensionalen, können Geraden im dreidimensionalen Raum **vier** unterschiedliche Lagen zueinander haben:

1. Die Geraden können **identisch** sein. Bei Geradengleichungen im zweidimensionalen würde man das sofort sehen, aber da in der vektoriellen Darstellung ein und dieselbe Gerade sehr unterschiedlich beschrieben werden kann, muss auch dieser Fall untersucht werden.
2. Zwei Geraden können **parallel** sein.
3. Zwei Geraden können sich **schneiden**.
4. Zwei Geraden können **windschief** zueinander liegen. Dies bedeutet, dass sie sich kreuzen würden, wenn sie auf der gleichen Höhe lägen.

Erfahrungsgemäß ist der Begriff 'windschief' der, der am meisten Probleme bereitet. Am einfachsten macht man ihn sich klar, wenn man einmal zwei Stifte gekreuzt vor sich auf den Tisch legt. Nun kann man, ohne sonst viel zu ändern, den oberen der beiden anheben, bis er über dem unteren schwebt. Nun liegen die beiden Stifte auf windschiefen Geraden.

23.3.1.2 Die Berechnungen

Grundsätzlich werden auch im Falle zweier Geraden deren Gleichungen gleich gesetzt. Dabei sind die zugehörigen Interpretationen:

1. Hat das LGS unendlich viele Lösungen, dann haben die beiden Geraden unendlich viele gemeinsame Punkte, die Geraden sind **identisch**.
2. Hat das LGS nur eine Lösung, dann haben die Geraden auch nur einen gemeinsamen Punkt, sie schneiden sich.
3. Der kritische Fall tritt dann ein, wenn das LGS unlösbar ist, die Geraden also keinen gemeinsamen Punkt haben. Diese können nun parallel **oder** windschief sein!

23.3.1.3 Keine Lösung

Nur in diesem Fall, dass das obige LGS keine Lösung hat, ergibt sich nicht unmittelbar daraus, wie die beiden Geraden zueinander liegen[3].
Hier muss eine **zusätzliche** Überlgung mit einfließen. Wenn die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben, so können sie (s.o.) Parallel oder windschief sein. Wenn sie aber parallel sind, dann müssen die Richtungsvektoren linear abhängig sein. Da es sich nur um zwei Vektoren handelt, muss nur untersucht werden, ob der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen ist. Ist das der Fall, dann sind die beiden Geraden **parallel**, sind sie es nicht, dann sind die Geraden **windschief**.

23.3.1.4 Beispiele

1. Beispiel

Wie liegen

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zueinander?

[3] Dieser Fall tritt auch nicht auf, wenn gleich die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene, oder die zweier Ebenen untersucht werden soll!

Man setzt die beiden Geradengleichungen gleich und löst das Gleichungssystem mit zwei Variablen und drei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl}
I & 1+r & = & -1-s \\
II & -r & = & 2+s \\
III & 2+2r & = & -2-2s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 1+r & = & -1-s \\
II & r & = & -2-s \\
III & 2+2r & = & -2-2s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 1-2-s & = & -1-s \\
II & r & = & -2-s \\
III & 2+2(-2-s) & = & -2-2s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 0 & = & 0 \\
II & r & = & -2-s \\
III & 0 & = & 0
\end{array}$$

Das Gleichungssystem hat nach den Umformungen nur noch eine Gleichung, die nicht vollständig Null ist, es hat unendlich viele Lösungen, also sind die beiden Geraden identisch!

2. Beispiel

Wie liegen die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zueinander?

$$\begin{array}{lrcl}
I & 1+3r & = & 6-5s \\
II & -2+r & = & 5+s \\
III & 3-r & = & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 1+3r & = & 6-5(3-r) \\
II & -2+r & = & 5+3-r \\
III & 3-r & = & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 10 & = & 2r \\
II & -10 & = & -2r \\
III & 3-r & = & s
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
I & 5 & = & r \\
II & 5 & = & r \\
III & -2 & = & s
\end{array}$$

Das Gleichungssystem hat nur eine Lösung: $r = 5$ und $s = -2$, die Geraden schneiden sich also. Aber man kann noch mehr berechnen. Setzt man in der ersten Gleichung einmal $r = 5$ ein, dann erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Setzt man das $s = -2$ in die zweite Geradengleichung ein, dann erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

also beide Male den gleichen (Orts)Vektor. Offenbar, da dieser Punkt ja auf beiden Geraden liegt, muss es der Schnittpunkt sein.

3. Beispiel

Wie liegen die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zueinander?

$$\begin{array}{lrcl} I & 1+2r & = & 6+s \\ II & 1+r & = & 4 \\ III & 2r & = & 6+2s \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & 1 & = & s \\ II & r & = & 3 \\ III & 6 & = & 8 \end{array}$$

Offenbar ist das Gleichungssystem nicht lösbar!
Nun muss nochuntersucht werden, ob die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Das kann aber nicht sein, dann das zweite Element des zweitenVektors ist eine Null. Um dies auch bei dem anderen Richtungsvektor zu erreichen, müsste man ihn mit Null multiplizieren, was den Nullvektor ergäbe.
Offenbar sind die beiden Geraden windschief.

4. Beispiel

Wie liegen die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zueinander?

$$\begin{array}{lrcl} I & -2+2r & = & 8-s \\ II & 1 & = & 1 \\ III & 1-4r & = & 13+2s \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & s & = & 10-2r \\ II & 1 & = & 1 \\ III & 1-4r & = & 13+2(10-2r) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & s & = & 10-2r \\ II & 1 & = & 1 \\ III & 1 & = & 33 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile ist leicht absehbar, dass das Gleichungssystem keine Lösung haben kann. Wieder betrachtet man die beiden Richtungsvektoren und es ist leicht zu sehen, dass

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander, die beiden Geraden sind also parallel.

Aufgaben

A124. Bestimme jeweils die gegenseitige Lage der folgenden Geraden. Wenn die Geraden sich schneiden, dann bestimme zusätzlich den Schnittpunkt.

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

23.3.2 Gerade und Ebene

Bei einer Geraden und einer Ebene ist die Sache wieder einfacher. Setzt man die beiden entsprechenden Gleichungen gleich, ergibt sich ein Gleichungssystem, das

- Keine Lösung hat, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft.
- Eine Lösung hat, wenn die Gerade die Ebene schneidet. Setzt man die Lösung(en) in die Geraden- oder die Ebenengleichung ein, erhält man den Schnittpunkt.
- Unendlich viele Lösungen hat, wenn die Gerade in der Ebene verläuft.

1. Beispiel

Untersucht werden soll die gegenseitige Lage von

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{array}{lrcl} I & 3+2r & = & 1+s \\ II & 4+r & = & 3+2s+t \\ III & 3-3r & = & t \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & 2 & = & s-2r \\ II & -2 & = & 2s-4r \\ III & 3-3r & = & t \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & s & = & 2+2r \\ II & -2 & = & 4 \\ III & 3-3r & = & t \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist, die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

2. Beispiel

Untersucht werden soll die gegenseitige Lage von

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen erhält man hier:

$$\begin{array}{lrcl} I & 2 & = & 1+s \\ II & 1+r & = & 1+t \\ III & 3-r & = & s+t \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} I & 1 & = & s \\ II & r & = & t \\ III & 2 & = & r+t \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen: $r = 1$, $s = 1$ und $t = 1$. Setzt man $r = 1$ in die Geradengleichung ein, erhält man mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

den Ortsvektor des Schnittpunkts.

3. Beispiel

Untersucht werden soll die gegenseitige Lage von

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen erhält man hier:

$$\begin{array}{crcl} I & 3+2r & = & 1+s \\ II & -r & = & 1+t \\ III & 1+r & = & s+t \end{array}$$

$$\begin{array}{crcl} I & 0 & = & s+2t \\ II & r & = & -1-t \\ III & 0 & = & s+2t \end{array}$$

$$\begin{array}{crcl} I & 0 & = & s+2t \\ II & r & = & -1-t \\ III & 0 & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die Gerade verläuft demnach in der Ebene.

Aufgaben

A125. Zeige rechnerisch, dass die angegebene Gerade die angegebene Ebene schneidet und berechne dann den Schnittpunkt.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A126. Ein Flugzeug fliegt in einer Ebene, die mit der Gleichung:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann. Das jeweils erste Element gibt dabei die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte Element die Höhe an.
An welchem Punkt der Ebene muss das Flugzeug den Landeanflug beginnen, wenn der Zielflughafen die Koordinaten: $F(3/1/0)$ hat und das Flugzeug sich mit dem (Richtungs)Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dem Flughafen nähern soll?

23.3.2.1 Anderen Ebenendarstellungen

Ist die Ebene durch eine Normalenform oder durch eine Koordinatenform gegeben, dann ist das Vorgehen prinzipiell gleich zu dem oben beschriebenen Verfahren, nur die Gleichung der Geraden zunächst als **ein** Vektor geschrieben wird und dieser dann für den Vektor '$\vec{x}$' in der Normalenform oder seine Koordinaten in die Koordinatenform eingesetzt wird. In jedem Fall ergibt sich eine lineare Gleichung mit einer Variablen. Die Interpretation entspricht dann wieder vollkommen dem obigen Vorgehen bei der Parameterform.

1. Beispiel

Untersucht werden soll die gegenseitige Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Ebene

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

Zunächst wird die Geradengleichung als **ein** Vektor geschrieben:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0[r] \\ 2r \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2r \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diesen Vektor setzt man nun in die Ebenengleichung ein und löst die entstehende Gleichung.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2r \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 5 \\ 1 \cdot 2 + (2+2r) \cdot 0 + r \cdot 1 &= 5 \\ 2 + r &= 5 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat die Lösung $r = 3$. Damit durchstößt die Ergade die Ebene. Den Durchstoßpunkt erhält man, wenn man $r = 3$ in die Geradengleichung einsetzt[4]

2. Beispiel

Bei der gleichen Geraden, wie im letzten Beispiel, soll nun die Lage im Verhältnis zu der Ebene

$$2x + y + 3z = 12$$

untersucht werden. Nun werden die drei Koordinaten des einen Vektors in die Koordinatengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + (2+2r) + 3 \cdot r &= 12 \\ 4 + 5r &= 12 \\ 5r &= 8 \\ r &= \frac{8}{5} = 1,6 \end{aligned}$$

Auch hier ist die Gleichung wieder lösbar, also schneidet die Gerade die Ebene und wie oben erhält man den Durchstoßpunkt durch Einsetzen des Ergebnisses in die Geradengleichung.
Wäre die Gleichung unlösbar gewesen, dann läge die Gerade parallel, aber nicht in der Ebene. Hätte sie unendlich viele Lösungen gehabt, würde die Gerade in der Ebene verlaufen.

23.4 Ebene und Ebene

Setzt man zwei Ebenen gleich, erhält man ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit vier Variablen. Ein solches Gleichungssystem kann nur **unlösbar** sein, oder **unendlich** viele Lösungen haben.
Ist das Gleichungssystem unlösbar, dann liegen die Ebenen parallel.
Hat es unendlich viele Lösungen, dann kommt es auf den Freiheitsgrad des Gleichungssystems an. Ist dieser 1, dann schneiden sich die Ebenen, ist er 2, dann sind die Ebenen identisch.

[4] Sei zur Übung dir selbst überlassen.

Die Aussage zu den Freiheitsgraden stimmt mit der Vorstellung überein:

- Ist der Freiheitsgrad 1, dann liegen die gemeinsamen Punkte in einem eindimensionalen Gebilde, der Schnittgeraden!
- Ist der Freiheitsgrad 2, dann liegen auch die gemeinsamen Punkte in einem zweidimensionalen Gebilde, also einer Ebene. Die beiden Ebenen müssen identisch sein.

IV Stochastik

Keine Panik!

24 Grundlagen der Stochastik

24.1 Das Zufallsexperiment

Zentraler Aspekt der Stochastik[1] ist das **Zufallsexperiment**.

> Ein Zufallsexperiment ist jeder Vorgang, der verschiedene Ausgänge oder Ergebnisse haben kann, bei dem aber nicht **berechnet** werden kann, welches Ergebnis sich bei der konkreten Durchführung ergeben wird.

Beispiele für Zufallsexperimente sind:

- Das Werfen eines normalen Spielwürfels.
  Es gibt mehrere mögliche Ergebnisse: '1', '2', '3', '4', '5' und '6', wobei vor dem Wurf nicht berechnet werden kann, welches dieser Ergebnisse sich bei dem Wurf ergeben wird.
- Das Werfen einer Münze.
  Auch hier gibt es mehrere mögliche Ergebnisse, die üblichweise mit Kopf (K) und Zahl (Z) bezeichnet werden und auch hier kann vor einem Wurf nicht berechnet werden, welche der beiden Seiten die Münze nach dem Wurf zeigen wird.
- Die Zeugung und Geburt eines Kindes.
  Biologisch betrachtet kann dieses 'Experiment' die Ergebnisse 'männlich' oder 'weiblich' haben, aber auch das kann nicht vorher berechnet werden.
- Das Schreiben einer Mathematikarbeit.
  Auch die Arbeit kann die Ergebnisse 'sehr gut' bis 'ungenügend' haben und sicherlich kann man das Ergebnis **beeinflussen**, aber eben nicht berechnen.

Das 'Ende' eine Zufallsexperiments nennt man **Ergebnis**. Alle Ergebnisse zusammen genommen nennt man **Ergebnisraum**. So hat etwa das Würfeln mit einem Würfel den Ergebnisraum: $E = \{'1',' 2',' 3',' 4',' 5',' 6'\}$.

Aufgaben

A127. Überlege, ob es sich bei den folgenden Angaben um die Beschreibung eines Zufallsexperiments handelt:

a) Ein Supermarkt bietet in seiner Broschüre Eier, Butter und Milch an. Man kauft in diesem Supermarkt 10 Eier, 2 Päckchen Butter und 3l Milch.
b) Man geht in einem Supermarkt, den man nicht kennt und von dem man auch kein Prospekt besitzt und kauft dort 10 Eier, 2 Päckchen Butter und 3l Milch.
c) Man würfelt mit einem normalen Spielwürfel.
d) Für eine bestimmte Arbeit braucht der Arbeiter A alleine 63 Stunden. Ein anderer Arbeiter braucht für die gleiche Arbeit 72 Stunden. Wir betrachten die Frage, wie lange die beiden brauchen werden, wenn sie die Arbeit zusammen erledigen.

24.2 Der Begriff Stochastik

Der Begriff Stochastik umfasst zwei Teilgebiete der Mathematik: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik. Beide Teilgebiete arbeiten mit Zufallsexperimenten, allerdings in einer grundlegend anderen Sichtweise:

> Die Statistik untersucht die Ergebnisse von Zufallsexperimenten, die schon durchgeführt wurden. Sie bezieht soch also auf die **Vergangenheit**.
> Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit Aussagen über Zufallsexperimente, die noch durchgeführt werden sollen, also mit der **Zukunft**.

Das verbindende Element ist das Zufallsexperiment und seine Ergebnisse. Die jeweilige Sicht darauf soll nun dargelegt werden.

[1] Begriffsbestimmung folgt gleich.

24.2.1 Das Zufallsexperiment aus Sicht der Statistik

In der Statistik geht man in der Regel nicht davon aus, dass ein Zufallsexperiment nur einmal durchgeführt wurde[2]. Die Anzahl der Durchführungen eines Zufallsexperiments nennt man: **Umfang der Stichprobe** und bezeichnet diesen meist mit dem Buchstaben 'n'.
Normalerweise kommt dabei jedem möglichen Ergebnis des Ergebnisraums eine bestimmte Anzahl zu, mit der dieses Ergebnis auch tatsächlich erreicht wurde. Diese Anzahl heißt: **Absolute Häufigkeit**.
Dividiert man nun die absolute Häufigkeit eines Ergenbisses durch den Stichprobenumfang, dann erhält man die sogenannte: **Relative Häufigkeit** des Ergebnisses.
Diese drei Begriffe, Stichprobenumfang, absolute und relative Häufigkeit sind so grundlegend für die Statistik, dass sie anhand eines Beispiels erläutert werden sollen:
Angenommen, man würfelt 30 mal mit einem normalen Spielwürfel. Dann ist der Stichprobenumfang: 30.
Nimmt man weiter an, dass bei jeder Durchführung dieses Experiments das Ergebnis notiert wurde und diese Notizen in folgender Tabelle zusammen gefasst wurden:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	4	4	7	6	2	7

Dann stehen in der zweiten Zeile die jeweils absoluten Häufigkeiten der darüber stehenden Ergebnisse. So hat etwa das Ergebnis '3' die absolute Häufigkeit 7 und das Ergebnis '5' die absolute Häufigkeit 2.
Die absolute Häufigkeit ist oftmals nicht sonderlich aussagekräftig. So würde es etwa einem Gesprächspartner von mir wenig nützen, wenn ich ihm sagte, dass ich gestern zwei mal eine '5' gewürfelt hätte. Was ihm fehlen würde wäre der Stichprobenumfang. Hätte ich 1000 mal gewürfelt, dann wären zwei Fünfen geradezu verschwindend wenig. Hätte ich dagegen nur dreimal gewürfelt, wäre die Anzahl ziemlich hoch.
Aus diesem Grund berechnet man oftmals die relative Häufigkeit, welche die absolute Häufigkeit durch den Stichprobenumfang teilt. Sie wird entweder als Bruch oder als Prozentangabe notiert. Macht man das mit obige Tabelle, dann ergibt sich:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Abs. Anzahl	4	4	7	6	2	7
Rel. Häufigkeit (Bruch)	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{7}{30}$
Rel. Häufigkeit (Proz.)	13,3%	13,3%	23,3%	20%	6,7%	23,3%

Die Angabe der relativen Häufigkeit ist wesentlich leichter lesbar und interpretierbar. So sieht man insbesondere in der letzten Zeile, dass die '5' vergleichsweise selten, die '3' und die '6' vergleichsweise oft vorgekommen ist.
Aber man erkennt noch mehr: Die Summe aller relativen Häufigkeiten ist immer 1 (bei den Brüchen)[3] oder 100% (Bei den Prozenten)[4].

24.2.2 Die Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Da sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung um Zufallsexperimente kümmert, die erst noch gemacht werden müssen, kann es natürlich hier keine Häufigkeiten geben.
Statt dessen geht die Wahrscheinlichkeitsrechnung davon aus, dass jedem möglichen Ergebnis des Zufallsversuchs eine **Wahrscheinlichkeit** zukommt. Diese Wahrscheinlichkeit hat einige Eigenschaften:

1. Es ist eine Zahl zwischen 0 und 1.
2. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von allen möglichen Ergebnissen ist 1.
3. Die Wahrscheinlichkeit kann **nicht** berechnet oder auf eine andere Art und Weise ermittelt werden.

Vor allem die letzte Aussage scheint dazu geeignet zu sein, die ganze Sache schnell wieder zu vergessen, aber auch wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses nicht ermittelt werden kann, so gibt es doch eine Reihe von Verfahren, mit denen man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses *schätzen* kann und mit diesen geschätzten Wahrscheinlichkeiten kann man dann rechnen, wie dir folgenden Kapitel zeigen werden.

---

[2] Allerdings wohl, dass diese Durchführungen in der Vergangenheit liegen!

[3] Da so etwas relativ als Überprüfung genutzt wird, bietet es sich zumeist an die Brüche nicht zu kürzen, wie es auch in der obigen Tabelle nicht getan wurde. Die Summe der Brüche ist dann viel leicher zu berechnen.

[4] Das in obiger Tabelle nicht genau 100%, sondern 99% als Summe heraus kommt, liegt an Rundungsfehlern.

24.2.2.1 Schätzungen mit der relativen Häufigkeit

Die ersten beiden Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von oben, legt die Vermutung nahe, dass die Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeitsrechnung) etwas mit der relativen Häufigkeit (Statistik) zu tun haben könnte und tatsächlich ist *eine* Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung das '**Gesetz der großen Zahlen**':

> Je häufiger man ein Zufallsexperiment durchführt, desto mehr nähert sich die relative Häufigkeit der Ergebnisse den Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse an.

Will man also die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse eines Zufallsexperiments abschätzen, dann kann man das Experiment (sehr) oft durchführen, dann die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse berechnen und diese dann als Schätzung der Wahrscheinlichkeiten verwenden.

24.2.2.2 Schätzungen bei Laplace-Experimenten

Eine weitere Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen besteht dann, wenn essich bei dem Experiment um ein sogenanntes **Laplace-Experiment** handelt.
Bei Laplace-Experimenten kann man davon ausgehen, dass jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Jedem einzelnen Ergebnis kommt dann die Wahrscheinlichkeit von:

$$\frac{1}{\text{Anzahl der Ergebnisse}}$$

zu. Gibt es beispielsweise nur zwei mögliche Ergebnisse[5], dann hat jedes Ergebnis die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Gibt es drei mögliche Ergebnisse, dann ist[6] die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses $\frac{1}{3}$.
Typische Beispiele für Laplace-Experimente sind der Münzwurf (Einzelwahrscheinlichkeit: $\frac{1}{2}$) und das Werfen eines Spielwürfels (Einzelwahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6}$).

24.3 Das Urnenmodell

Im Mathematikunterricht werden Zufallsexperimente oftmals durch Modelle ersetzt. Das wichtigste, weil flexibelste Modell ist das Modell der Urnenziehung.
Bei diesem Modell geht man davon aus, dass man eine Urne, ein Gefäß, dessen Inhalt nicht sichtbar ist, hat, in dem sich eine gewissen Anzahl von Kugeln befinden, die sich durch 'Befühlen' nicht unterscheiden lassen.
Aus dieser Urne werden nun Kugeln gezogen[7], die nach der Ziehung dann unterschiedliche Eigenschaften aufweisen, die unterschieden werden können, etwa eine Beschriftung mit Zahlen, die Farbe oder weitere Unterscheidungsmerkmale.
Man geht dabei davon aus, dass diese Urnenziehung ein Laplace-Experiment ist, dass also jede Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat gezogen zu werden. Diese Wahrscheinlichkeit kann dann auch angegeben werden. Liegen 10 Kugeln in der Urne, dann ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$, liegen 12 darin eben $\frac{1}{12}$.

24.3.1 Nicht-Laplace-Experimente

Mit dem Urnenmodell lassen sich auch Zufallsexperimente simulieren, die keine Laplace-Experimente sind, was am besten durch ein Beispiel gezeigt wird:
In einer Urne liegen 10 Kugeln von denen 3 schwarz und 7 weiß sind.
Wird aus dieser Urne eine Kugel gezogen, dann hat jede Kugel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ gezogen zu werden, da ja zehn Kugeln in der Urne liegen und die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden gleich verteilt ist.
Interessiert man sich nun allerdings für die Farbe der gezogenen Kugel, dann addieren[8] sich die Wahrscheinlichkeiten **aller** schwarzen Kugeln zu der Wahrscheinlichkeit, dass **eine** schwarze Kugel gezogen wird und das gleiche gilt auch für die weißen Kugeln.
Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen ist dann $\frac{3}{10}$ und die eine weiße zu ziehen $\frac{7}{10}$. Wegen den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für 'schwarz' und 'weiß' ist es also kein Laplace-Experiment mehr.

---

[5] Etwa bei Wurf einer Münze.

[6] Genauer: Dann kann die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses geschätzt erden.

[7] Im einfachsten Fall nur eine!

[8] Hier wird erstmalig mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet. Dass diese Rechnung gültig ist, folgt aus dem Satz der Pfadaddition, das noch vorgestellt werden wird.

Aufgaben

A128. In einer Urne liegen 2 weiße, 3 rote und 4 schwarze Kugeln. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen. Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass es sich um eine rote Kugel handelt.

24.3.2 Mehrfachziehungen

Wird mehr als eine Kugel aus einer Urne gezogen, dann werden drei Arten der Ziehung unterschieden, die gleich vorgestellt werden. Um diese drei Möglichkeiten aber vollständig beschreiben zu können, sollen erst noch zwei Begriffe eingeführt werden.

24.3.2.1 Fakultät

Mit der sogenannten Fakultät ist es möglich große Produkte recht einfach darzustellen. Die Fakultät wird dabei durch eine Zahl mit nahgestelltem Ausrufezeichen geschrieben.
Sie bedeutet, dass alle Zahlen von der 1 an, bis zur angegebenen Zahl miteinander multipliziert werden müssen, etwa

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Allgemein gilt:

Der Ausdruck '$n!$' heißt n-**Fakultät** und beschreibt das Produkt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Weiterhin ist:

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

24.3.2.2 Binomialkoeffizient

Mit Fakultäten können auch die sogenannten Binomialkoeffizienten berechnet werden[9].
Sie werden '$\binom{n}{k}$' geschrieben und "n über k" ausgesprochen. Ihre Definition ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

24.3.2.3 Ziehen mit Zurücklegen

Bei dieser Art der Ziehung geht man davon aus, dass zunächst eine Kugel gezogen wird, ihre Charakeristika notiert werden und die Kugel dann wieder in die Urne gelegt wird[10].
Bei der Ziehung der zweiten Kugel ist dann die Ausgangsloge wieder exakt die gleiche, wie sie es vor der ersten Ziehung war.
Nur bei dieser Art der Ziehung kann eine Kugel im Verlauf des Experiments mehrfach gezogen werden.
Werden aus einer Urne, in der sich 'n' Kugeln befinden 'k' Kugeln gezogen, dann gibt es bei dieser Art der Ziehung n^k mögliche Ergebnisse.

24.3.2.4 Ziehen ohne Zurücklegen

Bei dieser Art der Ziehung geht man davon aus, dass zunächst eine Kugel gezogen wird und ihre Charakteristika notiert werden, die Kugel danach aber nicht wieder in die Urne gelegt wird, sondern draußen verbleibt.
Die Ausgangslange bei der Ziehung einer zweiten Kugel ist nun eine andere, als sie es bei der Ziehung der ersten Kugel war, da sich die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne verringert hat und somit jede Kugel eine neue Wahrscheinlichkeit hat gezogen zu werden.
Bei dieser Art der Ziehung ist die Reihenfolge der Ziehungen bedeutsam, spielt also beim 'Endergebnis' eine Rolle.
Will man etwa mit einer Urnenziehung zufällig eine zweistellige Zahl mit unterschiedlichen Ziffern erzeugen, dann könnte man folgendermaßen vorgehen: Man legt 10 Kugeln mit den Beschriftungen '0' bis '9' in eine Urne und zieht nacheinander daraus zwei Kugeln. Da die Ziffern der sich ergebenden Zahl unterschiedlich sein müssen, darf die erste Kugel nach ihrer Ziehung nicht wieder

[9] Sie heißen so, weil sie als Faktoren bei der Potenzierung von Binomen auftreten.
[10] Meinetwegen kann man sich auch nochvorstellen, dass die Kugeln danach wieder gemischt werden.

in die Urne gelegt werden. Außerdem ergäbe die Ziehung '1'-'2' ein anderes Ergebnis (12), als die Ziehung '2'-'1' (21).
Werden bei dieser Art der Ziehung 'k' Kugeln aus einer Urne, in der sich 'n' Kugeln befinden, gezogen, dann gibt es $\frac{n!}{k!}$ mögliche Ergebnisse.

24.3.2.5 Ziehen auf einen Griff

Bei dieser Art der Ziehung geht man davon aus, dass mehrere Kugeln gleichzeitig gezogen[11] werden. Die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer Kugel ist dann immer gleich 1 durch die ursprüngliche Anzahl von Kugeln und die Reihenfolge der Ziehung wird nicht berücksichtigt.
Würde man das Experiment der Erzeugung einer zweistelligen Zahl mit unterschiedlichen Ziffern mit einer Urnenziehung von zwei Kugeln auf einen Griff simulieren, dann hätte jede Ziffer die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ gezogen zu werden, die Ergebnisse '1'-'2' und '2'-'1' wären dann aber nicht mehr unterscheidbar[12].
Um eine Ziehung auf einen Griff handelt es sich daher eigentlich immer, wenn beim Endergebnis die Reihenfolge der Ziehung keine Berücksichtigung findet. Die Ziehung der Lottozahlen ist ein gutes Beispiel, weil das Endergebnis immer in aufsteigender Reihenfolge präsentiert wird, unabhängig davon in welcher Reihenfolge die Kugeln tatsächlich gezogen wurden.
Bei dieser Art der Ziehung gibt es bei 'n' Kugeln, von denen 'k' gezogen werden sollen $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Aufgaben

A129. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln mit den Aufschriften '0' bis '9'.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der **zweiten** Ziehung eine '2' gezogen wird, wenn bei der ersten Ziehung keine '2' gezogen wurde und die Kugeln nach der Ziehung nicht wieder zurück gelegt werden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der **zweiten** Ziehung eine '2' gezogen wird, wenn bei der ersten Ziehung schon die '2' gezogen wurde und die Kugeln nach der Ziehung nicht wieder zurück gelegt werden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der zweiten Ziehung eine '2' gezogen wird, wenn nach jeder Ziehung die Kugel wieder in die Urne zurück gelegt wird?

d) Wenn zwei Kugeln gleichzeitig aus der Urne gezogen werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den beiden Kugeln eine '2' befindet?

24.4 Ergebnis, Ereignis und Schreibweisen

24.4.1 Ergebnis

Ergebnisse sind mögliche Ausgänge von Zufallsexperimenten und es wurden nun schon viele solcher Ergebnisse vorgestellt. Ihre Wahrscheinlichkeit wird mit 'p' ausgedrückt[13], wobei in Klammern dahinter das Ergebnis angegeben wird.
Würfelt man etwa mit einem normalen Spielwürfel, dann kann man für die Wahrscheinlichkeit eine '3' zu würfeln auch schreiben:

$$p('3') = \frac{1}{6}$$

24.4.2 Ereignis

Vom Wort her sehr ähnlich[14], aber in der Sache etwas vollkommen anderes ist das **Ereignis**.
Man kann nämlich willkürlich[15] Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu Gruppen zusammen fassen. Diese Gruppen nennt man dann Ereignis.
Da soll durch ein Beispiel verdeutlicht werden: Wieder gehen wir davon aus, dass wir eine Urne mit den zehn Kugeln '0' bis '9' haben, aus der gezogen werden soll. Der **Ergebnis**raum dieses Zufallsexperiments ist:

$$\{'0','1','2','3','4','5','6','7','8','9'\}$$

und jedes dieser Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$

[11] In der Praxis muss das nicht unbedingt so sein. Wie man gleich sehen wird, ist etwa die Ziehung der Lottozahlen ein 'Ziehen auf einen Griff', auch wenn die Kugeln eine nach der anderen gezogen werden.

[12] Man müsste sich vorher darauf einigen, wie man eine Ziehung interpretiert, etwa dadurch, dass immer die kleinere Ziffer die Zehnerziffer ist.

[13] Vom englischen Wort probability.

[14] Für jedes Mal, dass ich mich im Unterricht versprochen habe einen Euro und . . .

[15] Das ist wichtig!

Man kann nun diese Ergebnisse zu Ereignissen zusammenfassen, etwa in das Ereignis der geraden und das Ereignis der ungeraden Zahlen. Ereignisse werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet, hier wäre etwa 'G' und 'U' denkbar und es wäre:

$$G = \{'0',' 2',' 4',' 6',' 8'\}$$
$$U = \{'1',' 3',' 5',' 7',' 9'\}$$

> Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die in dem Ereignis enthalten sind.

Hier also:

$$p(U) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$p(G) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Bei diesem Experiment sind auch andere Ereignisse denkbar, etwa:

Z = Die Menge der Kugeln, die eine durch 2 teilbare Zahl trägt.
D = Die Menge der Kugeln, die eine durch 3 teilbare Zahl trägt.

Als Menge geschrieben wären das:

$$Z = \{'0',' 2',' 4',' 6',' 8',\}$$
$$D = \{'0',' 3',' 6',' 9'\}$$

und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten wären:

$$p(Z) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$p(D) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Am letzten Beispiel sieht man, dass ein Ergebnis durchaus auch in zwei Ereignissen enthalten sein kann. Die Ergebnisse '0' und '6' sindsowohl in Z, als auch in D enthalten!

24.4.3 Das Gegenereignis

Zu jedem Ereignis gibt es ein weiteres Ereignis, dass all die Ergebnisse enthält, die nicht im ursprünglichen Ereignisenthalten sind. Dieses (zweite) Ereignis wird **Gegenereignis** zum ersten genannt und mit dem gleichen Buchstaben, allerdings mit einem Querstrich darüber, bezeichnet. Ist etwa zu dem obigen Experiment ein Ereignis

$$A = \{'0',' 1',' 2',' 3',' 4',' 5',' 7'\}$$

dann ist das Gegenereignis

$$\overline{A} = \{'6',' 8',' 9'\}$$

Für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis gilt die wichtige Regel:

> Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt:
>
> $$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$
>
> oder
>
> $$p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

24.4.4 Verknüpfungen von Ereignissen

Zwei Ereignisse können auch miteinander verknüpft werden. Die beiden wichtigsten Verknüofungen sind:

24.4.4.1 Der Schnitt zweier Ereignisse

Unter dem Schnitt[16] versteht man all die Ergebnisse, die **sowohl** im ersten **als auch** im zweiten Ereignis enthalten sind. Das Zeichen für den Schnitt ist dabei '∩'.
Sind etwa

$$A = \{'0',' 2',' 4',' 6',' 8'\}$$
$$B = \{'0',' 3',' 6',' 9'\}$$

dann ist

$$A \cap B = \{'0',' 6'\}$$

24.4.4.2 Die Vereinigung zweier Ereignisse

Unter der Vereinigung zweier Ereignisse versteht man alle Ergebnisse, die im erste **oder** im zweiten **oder** in beiden Ereignissen enthalten sind. Dabei werden keine Ergebnisse 'doppelt' genommen. Das Zeichen für die Vereinigung ist '∪'.
Für die obigen Ereignisse A und B gilt:

$$A \cup B = \{'0',' 2',' 3',' 4',' 6',' 8',' 9'\}$$

24.4.5 Das sichere und das unmögliche Ereignis

Bei der Verknüpfung[17] von Ereignissen können zwei Sonderfälle auftreten.

24.4.5.1 Das sichere Ereignis

Enthält ein Ereignis alle (möglichen) Ergebnisse eines Zufallsexperiments, dann heißt dieses Ereignis das **Sichere Ereignis** und seine Wahrscheinlichkeit ist 1.
So ist etwa beim Würfeln das Ereignis A='Das Ergebnis zeigt eine Augenzahl zwischen 1 und 6' ein sicheres Ereignis und es ist $p(A) = 1$.

24.4.5.2 Unmögliches Ereignis

Enthält ein Ereignis kein Ergebnis, dann heißt es **Unmögliches Ereignis** und seine Wahrscheinlichkeit ist 0.
So wäre etwa beim Wüfeln das Ereignis B='Das Ergebnis ist eine Augenzahl von 7' ein unmögliches Ereignis und es wäre $p(B) = 0$.

Aufgaben

A130. Ein Zufallsexperiment soll die Ergebnisse

$$\{'a',' b',' c',' d',' e'\}$$

haben.

a) Welche Ergebnisse enthält das Ereignis: A='Das Ergebnis ist ein Vokal (Selbstlaut)' und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?
b) Welche Ergebnisse enthält das Ereignis" B='Die Form des Buchstabens umschließt eine Fläche' (Der Buchstabe hat ein 'Loch') und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?
c) Welche Ergebnisse sind in $\overline{A}$ enthalten und welche Wahrscheinlichkeit hat dieses Ereignis?
d) Gib $A \cup B$ zusammen mit seiner Wahrscheinlichkeit an.
e) Gib $A \cap B$ zusammen mit seiner Wahrscheinlichkeit an.

24.5 Das Baumdiagramm

Will man mit den Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments rechnen, dann ist es oftmals sinnvoll zunächst eine Darstellung des Zufallsexperiments zu haben, um die beteiligten Wahrscheinlichkeiten besser zuordnen zu können. Ein sehr wertvolles Mittel zur Darstellung von Zufallsexperimenten ist das **Baumdiagramm**.

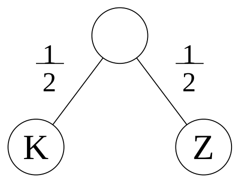
[16] Hat was mit dem Begriff 'Durchschnitt' zu tun.
[17] Aber auch schon bei der Definition.

24.5.1 Der grundsätzliche Aufbau

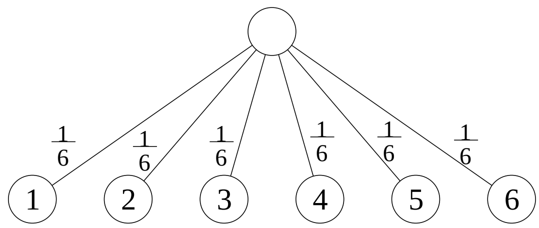
Ein Baumdiagramm hat den folgendne grundsätzlichen Aufbau:

- Das Diagramm beginnt immer mit einer 'Wurzel', die als Kreis dargestellt wird.
- Darunter (der Baum steht also quasi 'auf dem Kopf') wird für jedes mögliche Ergebnis des Zufallsversuchs eine Linie als 'Ast' gezeichnet, die in einem Kreis ('Blatt') endet. In dem Blatt wird das Ergebnis (abgekürzt) notiert und an die Äste die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

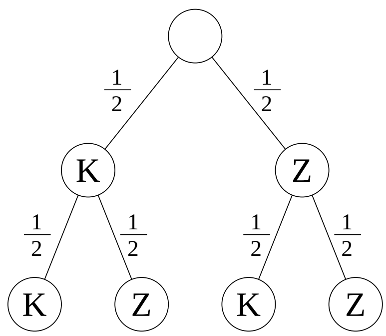
Für einen Münzwurf mit den beiden möglichen Ergebnissen Kopf ('K') und Zahl ('Z') mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{2}$ sieht das folgendermaßen aus:



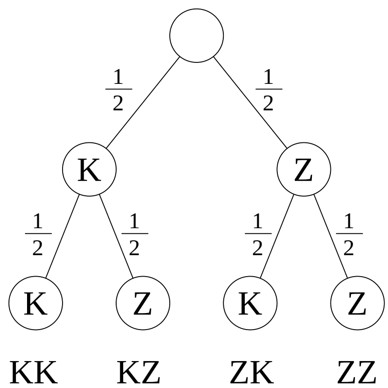
Soll statt dessen ein Wurf mit einem normalen Spielwürfel dargestellt werden, dann könnte das so aussehen:



Hat das Zufallsexperiment mehr als nur eine Handlung[18], dann wird jedes 'Blatt' der ersten Stufe als 'Wurzel' der nächsten Stufe behandelt, also an dieses Blatt wieder neue Äste und Blätter angehängt.
Bei einem zweimaligen Wurf einer Münze sähe das dann folgendermaßen aus:



Man mache sich klar, dass hier zwar **zweimal** einen Münze geworfen wird, es sich aber nur um **einen** Zufallsversuch handelt! Aus diesem Grunde ist es sinnvoll die Ergebnisse des (Gesamt)Zufallsversuchs auch noch unter die 'untersten' Blätter zu notieren:

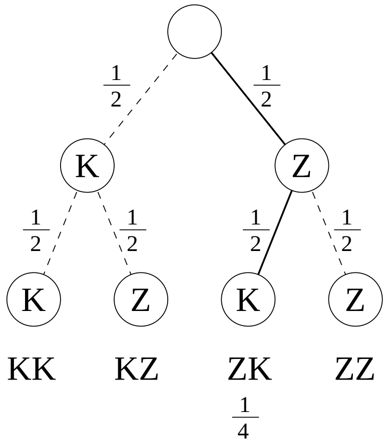


Für die Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm gilt die

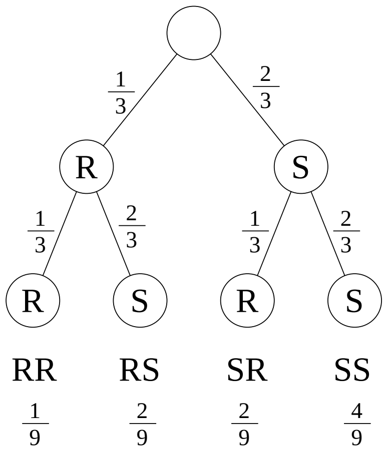
18 Zum Beispiel: Zweimaliges Würfeln, oder zweimaliger Münzwurf, oder Ziehen von mehr als einer Kugel aus einer Urne.

Pfadmultiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses eines mehrstufigen Zufallsversuchs ergibt sich aus dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten aller Pfade von der Wurzel zu dem Ergebnis.

Will man etwa die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man bei einem zweifachen Münzwurf zuerst eine Zahl und dann Kopf wirft, multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade: Wurzel — Zahl und dann Zahl — Kopf.
Das Ergebnis schreibt man unter das entsprechende Ergebnis:



Macht man das für alle Ergebnisse, ergibt sich ein **vollständiges** Baumdiagramm. Auch dafür soll ein Beispiel dargestellt werden und zwar zu dem folgenden Zufallsversuch:
In einer Urne liegen eine rote und zwei schwarze Kugeln. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und diese dann wieder in die Urne zurück gelegt. Anschließend wird eine weitere Kugel gezogen.



Die Regel, nach der oben die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet wurde, heißt im Zusammenhang mit Baumdiagrammen:

Pfadadditionsregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse, die zu dem Ereignis gehören.

Betrachtet man zum letzten Zufallsexperiment das Ereignis: E=Alle Ergebnisse, die (mindestens) eine rote Kugel enthalten, dann ist die dazu gehörende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} p(E) &= p(RR) + p(RS) + p(SR) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Für einen solchen Fall ist das Anfertigen eines vollständigen Baumdiagramms besonders hilfreich, weil dann alle Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten übersichtlich angeordnet sind und leicht identifiziert werden können.

Aufgaben

A131. In einer Urne liegen 2 rote und 3 blaue Kugeln.

a) Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei die zuerst gezogene Kugel nach dem Zug wieder in die Urne gelegt wird.

Stelle die Situation in einem Baumdiagramm dar.

b) Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Die erste Kugel wird allerdings vor der zweiten Ziehung **nicht** wieder in die Urne gelegt.

Stelle auch diese Situation in einem Baumdiagramm dar.

c) Beschreibe den Unterschied zwischen den beiden Baumdiagrammen

d) Gib für beide obige Fälle die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zuerst eine rote und dann eine blaue Kugel gezogen wird.

e) Gibt für beide obigen Fälle an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass keine blaue Kugel gezogen wurde.

f) Gib für beide obigen Fälle an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die beiden gezogenen Kugeln eine unterschiedliche Farbe haben.

24.5.2 Tipps zu Baumdiagrammen

24.5.2.1 Fang unten an!

Gerade bei Zufallsversuchen mit mehr als zwei Stufen kommt man mit dem Platz oft nicht so gut hin, wenn man das zugehörige Baumdiagramm 'von oben nach unten' zeichnen will.

Besser ist es, wenn man unten, also bei den (Gesamt)Ergebnissen des Zufallsversuchs beginnt. Die Anzahl der 'Blätter' lässt sich dabei folgendermaßen berechnen: Man multipliziert einfach die Möglichkeiten jeder Stufe miteinander.

Angenommen ein Zufallsversuch bestünde aus einem Münzwurf, dem Werfen eines Würfels und Ziehung aus einer Urne, in der sich Kugeln in den Farben rot, blau und grün befinden. Dann hat man in der ersten Stufe zwei Möglichkeiten (Kopf und Zahl), in der zweiten sechs ('1', '2', '3', '4', '5', '6') und in der dritten drei Möglichkeiten (rot, blau, grün). Insgesamt hat das Baumdiagramm dann $2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$ 'Blätter' am unteren Ende und mit deren Zeichnung sollte man anfangen und die anderen Stufen danach darüber anordnen.

24.5.2.2 Kontrolle

Nimmt man irgendeinen Knoten (Astgabel) im Baumdiagramm, dann müssen die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die von dem Knoten ausgehen, immer zusammen Eins ergeben.

Das gleiche gilt für die abschließend für die einzelnen (Gesamt)Ergebnisse des Zufallsexperiements berechneten Wahrscheinlichkeiten. Auch sie müssen zusammen immer Eins ergeben.

Aus diesem Grunde ist es zumeist sinnvoll die Brüche **nicht zu kürzen**! Dadurch sind auf jeder Ebene die Nenner immer gleich und die Brüche können sehr einfach addiert werden[19].

24.5.2.3 Unvollständige Baumdiagramme

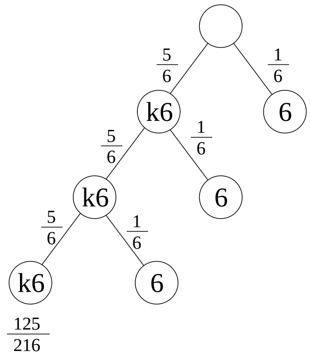
In vielen Situationen ist es gar nicht erforderlich ein vollständiges Baumdiagramm zu zeichnen. Eine typische Situation ist etwa die Fragestellung, wie wahrscheinlich es ist, bei drei Würfen mit einem Würfen eine 'Sechs' zu würfeln[20].

Wollte man in dieser Situation ein vollständiges Baumdiagramm zeichnen, dann hätte dieses insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ 'Blätter' — sicherlich **sehr** unpraktisch zu zeichnen!

Da es aber nur interessiert, ob eine 'Sechs' gewürfelt wird oder nicht, reicht auch das folgende, unvollständige Baumdiagramm:

[19] Siehe den Abschnitt zum Rechnen mit Brüchen.

[20] Man erinnere sich an den Beginn des Spiels 'Mensch ärgere dich nicht!'



Zwei Überlegungen sind in dieses 'Baumdiagramm' eingeflossen: Zum einen sind die Ergebnisse '1' bis '5' alle zu 'k6' (keine 6) zusammen gefasst. Zum anderen braucht das Baumdiagramm aber auch ab dem Moment nicht mehr weiter gezeichnet zu werden, ab dem eine 'Sechs' gefallen ist. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit in drei Würfen **keine** 'Sechs' zu würfeln $\frac{125}{216}$ beträgt. Mit der Regel für das Gegenereignis ergibt sich dann:

$$p(\text{eine } 6) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 42,1\%$$

Aufgaben

A132. Gib mit dem obigen Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten dafür an, im ersten, zweiten oder dritten Wurf eine 'Sechs' zu würfeln.

24.6 Fachbegriffe

Absolute Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit eines Ergebnisses ist die Anzahl, mit der dieses Ergebnis bei der (mehrfachen) Durchführung des Zufallsversuchs 'herauskam'.

Baumdiagramm

Mit einem Baumdiagramm können die möglichen Ergebnisse und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten übersichtlich dargestellt werden.
Weiterhin gelten bei Baumdiagrammen die Pfadmultiplikations- und die Pfadadditionsregel.

Binomialkoeffizient

Die Binomialkoeffizienten werden als '$\binom{n}{k}$' geschrieben und 'n über k" ausgesprochen. Sie bedeuten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ereignis

Ein Ereignis ist eine (willkürliche) Gruppierung von Ergebnissen eines Zufallsversuchs.
Auch die Sonderfälle, dass sich alle Ergebnisse in dem Ereignis befinden und dass kein Ergebnis in dem Ereignis enthalten ist, sind möglich.

Ergebnis

Unter einem Ergebnis versteht man das, was nach Durchführung eines Zufallsexperiments 'heraus' gekommen ist.

Ergebnisraum

Der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments sind alle möglichen Ergebnisse dieses Experiments.

Fakultät

Unter dem Ausdruck '$n!$', der n-**Fakultät** ausgesprochen wird, versteht man das Produkt aller Zahlen, die kleiner oder gleich 'n' sind, also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Pfadadditionsregel

Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu bestimmen müssen die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, addiert werden.

Pfadmultiplikationsregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses eines (mehrstufigen) Zufallsversuchs wird berechnet als Produkt aller Warhscheinlichkeiten entlang des Pfades von der Wurzel des Baumdiagramms zu diesem Ergebnis.

Relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses ist gleich der absoluten Häufigkeit dieses Ergebnisses dividiert durch die Anzahl der durchgeführten Zufallsversuche.

Statistik

Die Statistik ist der Teil der Mathematik, der sich mit der Auswertung (und Interpretation) von Zufallsversuchen beschäftigt, die schon durchgeführt wurden.
Die Statistik macht daher immer nur Aussagen über die **Vergangenheit**!

Stichprobenumfang

Der Stichprobenumfang ist die Anzahl der Zufallsexperimente, die durchgeführt wurden.

Urnenmodell

Ein (reichlich) universelles Modell für Zufallsversuche.
Bei dem Urnenmodell wird davon ausgegangen, dass sich eine gewissen Anzahl von Kugeln in einer Urne befinden, von denen eine oder mehrere nach bestimmten Verfahren gezogen werden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit der Abschätzung von Zufallsversuchen, die noch durchgeführt werden sollen.
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht sich dabei immer auf die **Zukunft**!

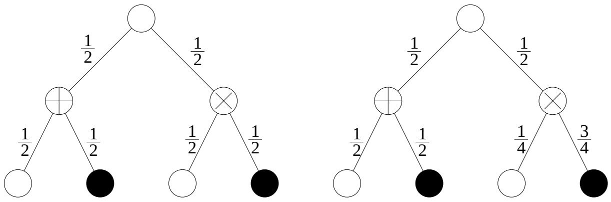
Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist jede Handlung, die mindestens zwei mögliche Ergebnisse hat und bei der sich nicht *berechnen* lässt, welches der Ergebnisse heraus kommen wird.

25 Weiteres

25.1 Abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeit

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ist es oft von Interesse, ob eine Stufe von der vorherigen anhängig ist oder nicht, ob sich also Veränderungen zeigen, in Abhängigkeit davon was in einer früheren Stufe gewählt wurde.



Unabhängige Wahrscheinlichkeit   Abhängige Wahrscheinlichkeit

Oben sind die beiden Baumdiagramme von zwei Zufallsversuchen dargestellt. In beiden Experimenten wurde zuerst zwischen Kreuz und Andreaskreuz gewählt[1]. In der zweiten Stufe wurde dann zwischen Schwarz und Weiß gewählt.
Der Unterschied dieser beiden Zufallsexperimente zeigt sich an den Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe. Während beim linken Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeitspaare ($\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$) gleich bleiben, **unabhängig** davon, ob in der ersten Stufe ein Kreuz oder ein Andreaskreuz gewählt wurde, Im rechten Baumdiagramm sieht das anders aus: Während beim linken Teilbaum die Wahrscheinlichkeiten auch $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind, haben sie beim rechten Teilbaum die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{\ }$ und $\frac{3}{4}$. Die Wahrscheinlichkeitspaare in der zweiten Stufe sind also **abhängig** davon, was in der ersten Stufe gewählt wurde.
Aus diesem Grunde nennt man die Wahrscheinlichkeiten im linken Baumdiagramm unabhängig und im rechten abhängig.

> Sind die Wahrscheinlichkeitswerte in einem Teilbaum immer gleich denen in den anderen Teilbäumen derselben Stufe, dann handelt es sich um eine **unahängige** Wahrscheinlichkeit, ändern sich dieWahrscheinlichkeiten, dann ist es eine **abhängige** Wahrscheinlichkeit.

Beim Urnenmodell ist typischerweise[2] das Ziehen mit zurück legen ein Experiment mit einer unabhängigen, das Ziehen ohne zurück legen eines mit einer abhängigen Wahrscheinlichkeit.

25.2 Andere Darstellungen

Mit Baumdiagrammen kann man sich Zusammenhänge bei Zufallsexperimenten leicht und einfach verständlich klar machen, aber es gibt auch Situationen, in denen ein Baumdiagramm nicht so geeignet ist.

25.2.1 Tabellen

Betrachten wir das folgende Beispiel: Mit einem Würfel wird zweimal gewürfelt und die jeweils dabei gewürfelten Augenzahlen werden addiert. Welche Augensumme hat dabei die größte Wahrscheinlichkeit?
Nun, der erste Wurf hätte bei einem Baumdiagramm sechs Pfade, die von der Wurzel ausgehen. Vom 'Blatt' jedes dieser Pfade gehen dann wieder sechs weitere Pfade ab, so dass das Baumdiagramm 36 'Blätter' hätte. Das alleine ist schon ausgesprochen umständlich[3], aber wäre noch machbar.
Aber danach müsste man für alle 36 Ergebnisse die Einzelwahrscheinlichkeiten berechnen, die allerdings immer $\frac{1}{36}$ ist, und dann noch zu allen auftretenden Augensummen bei den gleichen Augensummen die Wahrscheinlichkeiten addieren.

[1] Die Wahrscheinlichkeiten sind im Prinzip willkürlich gewählt, weil kein bestimmtes Zufallsexperiment beschrieben werden soll.
[2] Es gibt Ausnahmen!
[3] Man müsste vermutlich ein DIN A4-Blatt quer nehmen.

Insgesamt ziemlich aufwändig.
Viel besser wäre es, wenn man die Möglichkeiten beim zweifachen Wurf in einer Tabelle notiert. Diese könnte folgendermaßen aussehen:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

In dieser Tabelle ist in der waagerechten der Wurf des ersten und in der senkrechten der Wurf des zweiten Würfels abgebildet[4] Nun kann man die Summe der Augenzahlen sofort in die entsprechenden Fehler eintragen:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Wenn man nun noch weiß, dass jedes der Felder in der Tabelle die Einzelwahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ hat, dann sieht man sofort, dass die Augensumme 7 am häufigsten vorkommt und weil sie in sechs Feldern vorkommt, muss die Wahrscheinllichkeit für die Augensumme 7 gleich $\frac{3}{36} = \frac{1}{6}$ sein[5].

25.2.2 Vorsicht bei Tabellen

Aber auch bei Tabellen ist Vorsicht geboten. Betrachten wird noch einmal das obige Zufallsexperiment, allerdings schreiben wir nun in die Felder nicht die Summe der beiden Würfelaugen, sondern die Würfelergebnisse selber hin.

	1	2	3	4	5	6
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6

Und auch die Aufgabenstellung ändern wir ein kleines bisschen. Nun soll danach gefragt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass bei den beiden Würfen mindestens eine 'Sechs' gewürfelt wurde.
Man könnte nun auf die Idee kommen, dass in jeder der sechs Zeilen eine 'Sechs' vorkommt, nämlich ganz rechts. Analog kommt aber auch in jeder der sechs Spalten eine 'Sechs' vor, nämlich ganz unten. Sechs 'Sechsen' in Zeilen und sechs 'Sechsen' in den Spalten macht zusammen 12 'Sechsen', also wäre die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36}$.
Der Fehler, der dabei gemacht wurde, liegt darin, dass es zwar in der obigen Tabelle wirklich 12 'Sechsen' gibt, aber nur 11 Felder, in denen eine 'Sechs' steht, da das Feld mit '6/6' bei der obigen Zählung quasi doppelt gezählt wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also in Wirklichkeit nur $\frac{11}{36}$.

25.2.3 Vierfeldertafeln

Eine weitere Form Zufallsexperimente übersichtlich darzustellen bieten oftmals **Vierfeldertafeln**, die in zwei Formen vorkommen können: Mit absoluten oder relativen Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten[6].

[4] Oder umgekehrt.
[5] Dieses Wissen ist übrigens recht nützlich für alle Spiele, bei denen mit zwei Würfeln gewürfelt wird, etwa Backgammon. Bei diesen Spielen sollte man darauf achten, dass man seinen Spielstein nie sieben Felder vor einem gegnerischen Stein platziert, dort ist die Wahrscheinlichkeit rausgeworfen zu werden am größten.
[6] Bei den Vierfeldertafeln mischen sich die Sichtweisen der Statistik mit denen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so dass eine trennscharfe Verwendung der entsprechenden Begriffe nicht immer klar möglich ist.

Den Aufbau einer Vierfeldertafel beschreibt man am einfachsten mit einem Beispiel:

> *An einem medizinischen Feldversuch über eine bestimmte Erkrankung nahmen 12000 Menschen teil. Unter ihnen waren 5800 Männer und 6200 Frauen. Bei den Männern konnte bei 3800 Antikörper gegen die Krankheit festgestellt werden, bei den Frauen waren es 3000.*

Die obigen Informationen können nun in einer Tabelle zusammen aufgestellt werden:

	Männer	**Frauen**
Infiziert	3800	3000
Nicht infiziert	2000	3200

Auch wenn diese Tabelle nicht alle Informationen direkt enthält[7], so lassen sich aus den vier Felder[8] dieser Tabelle alle Informationen gewinnen, die der obige Text bereit hält.
Üblicherweise werden zu diesen vier Feldern noch am Rand die Summenwerte hinzu gefügt:

	Männer	**Frauen**	**Summe**
Infiziert	3800	3000	6800
Nicht infiziert	2000	3200	5200
Summe	5800	6200	12000

Nun sind nicht nur die Anzahl der Männer und der Frauen, sowie die Gesamtzahl der untersuchten Personen in der Tafel enthalten, sondern auch noch die (neue) Information, wieviele Menschen insgesamt infiziert oder nicht infiziert waren.
Um die zweite Form der Vierfeldertafel zu erhalten, muss man nur alle Zahlen in der obige Tabelle durch die Gesamtzahl aller untersuchten Personen dividieren und erhält[9]:

	Männer	**Frauen**	**Summe**
Infiziert	31,7%	25%	56,7%
Nicht infiziert	16,7%	26,7%	43,4%
Summe	48,3%	52,7%	100%

Mit einer solchen Tafel sind zunächst eine ganze Reihe von Aussagen möglich, die implizit in den Angaben gesteckt haben, ohne dass man sie unmittelbar erkennen konnte.
Will man etwa wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zufällig aus den Teilnehmern der Studien ausgesuchte Person eine Frau ist, dann kann man unmittelbar ablesen, dass es 52,7% sein muss. Analog ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person infiziert war, gleich 56,7%.

25.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es sind nun aber auch Aussagen möglich, die so einfach, wie in dieser Tafel nicht, nicht ermittelt werden könnte: Eine zufällig aus den teilnehmenden Personen ausgewählte Person ist ein Mann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mann infiziert ist.
Waren an den obigen Aussagen nur die 'Randwerte' der Tabelle beteiligt, also die Summen, kommt es nun auf die Werte innerhalb der Tabelle an, da ein Mann ausgewählt wurde, nur die erste Spalte. 31,7% (3800) der Männer war infiziert und insgesamt waren 48,3% (5800) Männer beteiligt. Dividiert man diese beiden Werte, erhält man:

$$\frac{31,7}{48,3} = \frac{3800}{5800} \approx 65,5\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Mann infiziert ist, beträgt also ca. 65,5%[10]
Eine solche Wahrscheinlichkeit nennt man **bedingte** Wahrscheinlichkeit, weil es, hier im Beispiel, die **Wahrscheinlichkeit** infiziert zu sein ist, **unter der Bedingung**, dass man einen Mann 'gezogen' hat.

[7] Wie etwa nicht die Gesamtzahl der Männer oder Frauen.

[8] Daher der Name

[9] Die Abweichungen von 100% entstehen durch Rundungsfehler

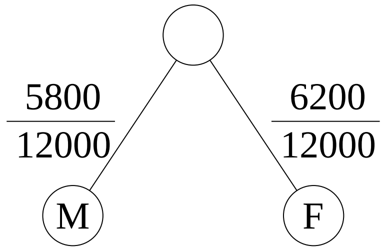
[10] Bei den Frauen wäre diese Wahrscheinlichkeit nur 48,4%, was ein wichtiges Indiz dafür sein könnte, dass Männer empfänglicher für diese Erkrankung sind als Frauen.

25.2.5 Umgedrehte Baumdiagramme

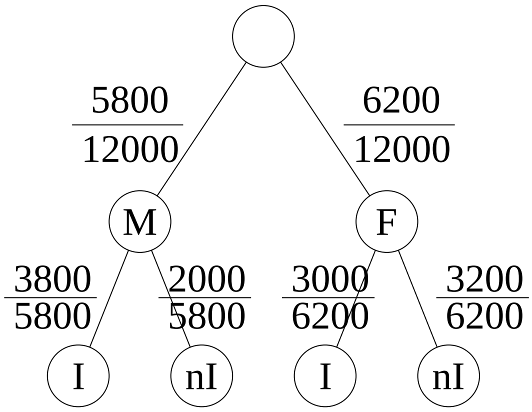
Mit dem Wissen um bedingte Wahrscheinlichkeiten ist es möglich aus einer Vierfeldertafel ein Baumdiagramm zu machen, also die Darstellungform zu wechseln. Genauer gesagt sind sogar zwei Umformungen denkbar.
Betrachten wir noch einmal die obige Vierfeldertafel:

	Männer	**Frauen**	**Summe**
Infiziert	3800	3000	6800
Nicht infiziert	2000	3200	5200
Summe	5800	6200	12000

Will man diese Vierfeldertafel im Sinne eines Baumdiagramms interpretieren, dann kann man sich das so vorstellen, dass aus der Gruppe der Teilnehmer eine Person gewählt wird. Hier kann man unterscheiden, ob es sich um einen Mann oder eine Frau handelt, was der ersten Stufe des Baumdiagramms entspricht:



Um nun auch noch die zweite Stufe des Baumdiagramms zeichnen zu können, braucht man die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Infizierung. Diese werden so berechnet, wie oben beschrieben:



Vollkommen analog kann man aber auch in der ersten Stufe zwischen Infizierten und nicht Infizierten unterscheiden und erst in der zweiten Stufe zwischen Männern und Frauen.

Aufgaben

A133. Zeichne das Baumdiagramm, wenn man bei obigem Versuch zuerst nach Infizierten und nicht Infizierten unterscheidet und dann erst nach Männern und Frauen.

25.3 Fachbegriffe

Abhängige Wahrscheinlichkeit

Wenn in einem mehrstufigen Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeiten in einer Stufe von der Wahl in der davor liegenden Stufe abhängen und sich dadurch unterscheiden, dann spricht man von abhängiger Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist eine Wahrscheinlichkeit unter einer weiteren, zusätzlichen Bedingung.

Unabhängige Wahrscheinlichkeit

Wenn die Wahrscheinlichkeiten in einem mehrstufigen Zufallsexperiment nicht von der Wahl der Stufe davor abhängen, also alle Teilbäume gleich sind, dann handelt es sich um eine unabhängige Wahrscheinlichkeit.

Vierfeldertafel

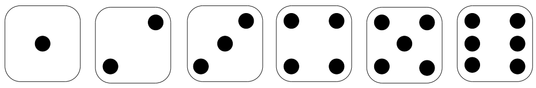
Vierfeldertafeln sind eine Möglichkeit zweistufige Zufallsexperimente, die jeweils nur zwei Ergebnisse haben, besonders effektiv und informationsreich darzustellen.

Keine Panik!

26 Zufall mit Zahlen

26.1 Der Wert des Zufalls

Zufallsexperimente können beliebige Ergebnisse haben. Der Münzwurf 'Kopf' und 'Zahl', der Würfel einen bis sechs Punkte oder auch Farben, wie bei manchen Kinderspielen.
Aber oftmals ist es so, dass wir den verschiedenen **Ergebnissen** eines Zufallsexperiments verschiedene **Zahlen** zuordnen. Den Bildern von Punkten auf dem Würfel



normalerweise ihrer 'Anzahl'[1], also den Zahlen 1 bis 6.
Auch Schulnoten, eigentlich 'sehr gut', 'gut' und so weiter, werden oftmals Zahlen, eben der 1 bis 6, zugeordnet.

> Ist einem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zugeordnet, so heißt diese **Zufallswert**.

Und mit Zufallswerten kann man nun ein paar interessante Sachen anstellen.

26.2 Mittelwerte und Streungen

Oftmals bildet man den Mittelwert, oder auch Durchschnitt genannt, von Zufallswerten. Der Durchschnitt einer Klassenarbeit etwa, oder den durchschnittlichen Verbrauch unseres Autos.
Aber wie geht das eigentlich und welche Mittelwerte gibt es denn? Das ist Thema dieses Abschnitts.

26.2.1 Das arithmetische Mittel

Wenn Menschen das Wort 'Durchschnitt' verwenden, meinen sie zumeist das in der Mathematik sogenannte **arithmetische Mittel**, weil das der Durchschnittswert ist, der am meisten angewendet wird. Seine Berechnung ist sehr einfach: Man addiert einfach alle Zahlen, von denen man den Durchschnitt bilden will und dividiert das Ergebnis durch die Anzahl der Zahlen.

> Für die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ergibt sich das **arithmetische Mittel** durch den Ausdruck
> $$\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

26.2.1.1 Ein genauerer Blick

So einfach, so gut, aber es lohnt sich einen genaueren Blick auf das arithmetische Mittel zu werfen.
Angenommen, die letzte Mathematikklausur hatte — in alphabetischer Reihenfolge der Schüler — die folgenden Ergebnisse:

$$2, 5, 4, 2, 3, 6, 1, 2, 3, 2, 4, 5, 6, 1, 1, 4, 3, 2$$

Natürlich könnte man den Durschnitt dieser Arbeit nach der obigen Methode berechnen, es geht aber auch günstiger indem man die Noten sortiert:

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6$$

Nun lässt sichdie Berechnung des Durchschnittswerts folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+4+4+4+5+5+6+6}{18} \\ &= \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{18}\end{aligned}$$

[1] Hat man etwa eine **zwei** gewürfelt, dann darf man auch **zwei** Schritte weiter ziehen.

Und damit hat man die Form erreicht, mit der wohl die meisten den Durchschnitt einer Klassenarbeit berechnen, aber man kann noch weiter denken:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{3\cdot 1+5\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6}{18}\\ &= \frac{3}{18}\cdot 1+\frac{5}{18}\cdot 2+\frac{3}{18}\cdot 3+\frac{3}{18}\cdot 4+\frac{2}{18}\cdot 5+\frac{2}{18}\cdot 6\end{aligned}$$

Man mag sich nun fragen, wieso die letzte Umformung, wenn doch der vorletzte Schritt schon die Berechnung zeigte, die normalerweise angewendet wird[2].
Betrachtet man den ersten Summanden: $\frac{3}{18}\cdot 1$, dann ist die '3' darin genau die absolute Häufigkeit der Note '1'. Dividiert man diese durch die Gesamtzahl der Arbeiten, erhält man ihre relative Häufigkeit. Analog ist $\frac{5}{18}$ die relative Häufigkeit der Note '2', und so weiter. Damit ist[3]:

> Will man das arithmetische Mittel von Zahlen berechnen, die nur die Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ annehmen, dann multipliziert man jeden Wert mit seiner relativen Häufigkeit und addiert diese dann.

26.2.2 Der Median

Die Mathematik kennt außer dem arithmetischen Mittel noch viele andere Arten einen Mittelwert zu berechnen[4]. In der Schule kommt außer dem arithmetischen Mittel nur der **Median** vor.

> Sortiert man die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Größe nach, dann heißt die Zahl, die in der Mitte steht: **Median**.
> Ist es eine gerade Anzahl von Zahlen, dann wird das arithmetische Mittel der mittleren beiden Median genannt.

Der Median stellt sicher, dass höchstens die Hälfte aller Zahlen größer ist als er und höchstens die Hälfte der Zahlen kleiner.
Der Median ist dann aussagekräftiger als das arithmetische Mittel, wenn es bei den Zahlwerten starke 'Ausreißer' gibt:

In einem Zwergstaat mit reichen Bodenschätzen, lässt der Diktator seine 1000 Untergebenen in den Bergwerken schuften. Er zahlt ihnen einen Lohn von gerade mal 1€ pro Monat, während er selbst monatlich ein Einkommen von 1000000€ einnimmt.

Braucht der Staat (internationale) Hilfe?
Das arithmetische Mittel ist hier:

$$\frac{1001000}{1001} = 1000$$

Und das würde bedeuten, dass im Durchschnitt jeder Bewohner des Landes 1000€ monatilich zur Verfügung hat → Kein Problem!
Der Median hier ist allerdings 1, was bedeutet, dass mindestens die Hälfte der Bevölkerung nur einen Euro im Monat, oder vielleicht sogar weniger, zur Verfügung hat → Doch ein Problem!
Ich denke, man muss es nicht erläutern, dass hier der Median ein deutlich besseres Bild abgibt, als das arithmetische Mittel.

Aufgaben

A134. Berechne zu den folgenden Angaben jeweils das arithmetische Mittel und den Median.

a)	$2, 3, 2, 4, 5, 5, 3$	b)	$23, 43, 53, 7, 23, 35, 32$
c)	$3, 4, 6, 3, 2, 4, 1, 3$	d)	$13, 54, 34, 65, 62, 24, 43, 3$

[2] Der Schnitt ist ürigens $\overline{x} = 3,\overline{1}$. Nur so am Rande!
[3] Für Blitzmerker: Da der Schnitt einer Klassenarbeit erst berechnet werden kann, nachdem die Arbeit geschrieben wurde, sprechen wir hier von Statistik. Will man das Ganze in die Wahrscheinlichkeitsrechnung übernehmen, kann die relative Häufigkeit wieder durch die Wahrscheinlichkeit ersetzt werden, aber das kommt erst gleich.
[4] So etwa das sogenannte geometrische Mittel

26.2.3 Die empirische Standardabweichung

Der Mittelwert[5] ist ein wichtiger Wert, um größe Datenmengen beurteilen zu können, allerdings haben die Überlegungen zum Median auch gezeigt, dass er so seine Schwächen hat.
Ein weiteres Beispiel: In der Klasse 1a, die zehn Schüler enthält, bekommen fünf Schüler eine '3' aufs Zeugnis und fünf eine '4'[6]. In der 1b, die ebenfalls zehn Schüler hat, bekommen fünf eine '1' und fünf eine '6' aufs Zeugnis.
Rechnerisch haben beide Klassen einen Durchschnitt von 3,5 erreicht, nur dass in der 1a alle versetzt werden, während in der 1b die Hälfte sitzen bleibt!
Der eklatante Unterschied der Benotung in den beiden Klassen liegt daran, dass in der 1a die Zeugnisnoten alle 'in der Nähe' des Mittelwerts liegen, während sie bei der 1b viel weiter davon entfernt sind. In der 1a haben alle Noten den Abstand 0,5 zum Mittelwert und in der 1b alle den Abstand 2,5.
Wünschenswert wäre also eine Möglichkeit, um den durchschnittlichen Abstand der Zahlwerte vom Mittelwert berechnen zu können.

> Der **Abstand** zweier Zahlen a_1 und a_2 ist:
>
> $$|a_1 - a_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2}$$

Der Absolutbetrag ist nötig, weil man sonst bei jeder Zahl überlegen müsste, ob es '$a_1 - a_2$' ist oder '$a_2 - a_1$'.
Für die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit dem Mittelwert $\overline{x}$ wäre damit der durchschnittliche Abstand:

$$\text{Abstand} = \frac{\sqrt{(x_1 - \overline{x})^2} + \sqrt{(x_2 - \overline{x})^2} + \ldots + \sqrt{(x_n - \overline{x})^2}}{n}$$

Das sieht zwar ziemlich kompliziert aus, ließe sich aber mit den heutigen technischen Methoden leicht realisieren[7]. Zum Zeitpunkt, als die Frage nach diesem 'durchschnittlichen Abstand' aber erstmalig auftrat, gab es noch keine Computer und vor allem die Berechnung von Wurzeln war sehr aufwändig[8] und der Mathematiker Gauss[9] fand schon im Alter von 18 Jahren eine Methode diese aufwändige Berechnung zu vereinfachen[10].
Er machte sich dabei zu Nutze, dass die Quadrierung nichts an den Größenverhältnissen ändert. Wenn $a < b$ ist, dann ist auch $a^2 < b^2$. Und da es ja hier in diesem Zusammenhang nur um die Größen*verhältnisse* geht, vereinfachte er den obigen Ausdruck zunächst zu:

$$\text{'}\mathit{Abstand}\text{'} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Auch mit dieser Berechnung, auch wenn sie nun nicht mehr den durchschnittlichen Abstand der Werte vom Mittelwert angibt, hat man ein Maß dafür, ob bei einer Gruppe von Zahlen der durchschnittliche Abstand größer oder kleiner ist, als bei einer anderen Gruppe. Damit der gefundene Wert zumindest 'in der Nähe' des durchschnittlichen Abstands liegt, änderte Gauss die Berechnung noch einmal zu:

> Haben die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Mittelwert $\overline{x}$, dann heißt:
>
> $$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$
>
> die **empirische Standardabweichung** der Zahlen x_1 bis x_n.

---

5 Im Weiteren wird darunter immer das arithmetische Mittel verstanden.
6 Ich kenn Klassen, die mit solch einem Ergebnis mehr als zufrieden wären!
7 Zum Beispiel mit einer Tabellenkalkulation, aber dazu gleich mehr.
8 Es gibt ein schriftliches Verfahren zur Berechnung von Wurzeln, aber das ist wirklich nicht so einfach.
9 Johann Carl Friedrich Gauss, geb. 30.4.1777 in Braunschweig, gest. 23.2.1855 in Göttingen.
10 Die sogenannte Fehlerquadratmethode.

Dass diese Zahl auch in der Lage ist anzugeben, ob die Werte einer Menge Zahlen 'dicht' um, oder 'weit verteilt' um den Mittelwert liegen, zeigt die Berechnung der empirischen Standardabweichung für die obigen Klassen 1a und 1b:

$$s_{1a} = 0,5$$
$$s_{1b} = 2,5$$

Bei der Klasse 1a ist die Abweichung viel geringer als bei der 1b[11]!

Ein Wort zu Computern

Vor allem in Tabellenkalkulationen wird die empirische Standardabweichung mit einer leicht geänderten Formel berechnet. Dabei wird die Summe der Quadrate nicht durch 'n' dividiert, sondern durch '$n-1$'[12]. Auch manche Taschenrechner machen das so. Wenn also bei der Bearbeitung von Aufgaben mit dem Taschenrechner oder einer Tabellenkalkulation andere Werte heraus kommen, als wenn man es 'per Hand' rechnet, kann das an diesem Umstand liegen.
Manche Tabellenkalkulationen bieten beiden Arten von Standardabweichung an, dann muss man probieren.

Aufgaben

A135. Berechne Mittelwert und empirische Standardabweichung der Zahlen:

$$1, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 3, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 2$$

A136. Der Trainer eines Vereins für Bogenschießen kann nur einen seiner 'Schützlinge' zu einem Wettbewerb entsenden, er hat aber zwei Kandidaten, die dafür in Frage kommen.
Bei einem letzten Test, bei dem beide Schützen je 10 mal auf die Scheibe schießen dürfen, erzielten die Schützen die folgenden Punktzahlen:

Schuss Nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
Schütze A	7	8	7	7	6	7	6	7	8	8
Schütze B	6	7	5	7	7	9	5	9	7	9

Berechne für beide Schützen den Mittelwert der Punkte und die Standardabweichung. Gib aufgrund deiner Berechnungen begründet an, welchen der Schützen **du** zu dem Wettkampf schicken würdest.

26.3 Erwartungswert und Standardabweichung

Oben wurde schon darauf hingewiesen, dass die Begriffe 'Mittelwert' und 'empirische Standardabeichung' sich auf Werte beziehen, die schon bekannt sind, also auf die Vergangenheit. Sie gehören daher zum Themengebiet der Statistik.
Wie schon im letzten Kapitel sollen nun diese Begriffe der Statistik in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung überführt werden.

26.3.1 Erwartungswert

Oben wurde erwähnt, dass man das arithmetische Mittel von verschiedenen Zahlen auch dadurch errechnen kann, dass man jeden vorkommenden Wert mit seiner relativen Häufigkeit multipliziert und diese Werte dann addiert.

Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die möglichen Zufallswerte eines Zufallsexperiments und die dazu gehörigen Wahrscheinlichkeiten sind: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dann heißt:

$$\mu = X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + \ldots + X_n \cdot p_n$$

der **Erwartungswert** dieses Zufallsexperiments.

Analog zum Mittelwert und dem Gesetz von den großen Zahlen kann man den Erwartungswert auch so verstehen, dass diese Zahl im Durchschnitt erwartet werden kann, wenn man das Zufallsexperiment lange genug durchführt.
Hierzu ein Beispiel:

[11] Dass die Werte hier genau den durchschnittlichen Abstand der Noten vom Mittelwert ergeben, liegt daran, dass die Zahlen so 'schön' verteilt sind. Bei einer 'normalen' Notenverteilung sähe das anders aus.

[12] Da es zwischen den n Zahlen eben n-1 Zwischenräume gibt.

> Auf einem Jahrmarkt steht ein 'Glücksrad' mit fünf gleich großen Sektoren. Ein Sektor ist rot, zwei grün und zwei schwarz.
> Bleibt das Glücksrad im roten Sektor stehen, gewinnt man einen Betrag von 5 € . Bleibt es bei einem der beiden grünen Sektoren stehen, erhält man einen Euro und bei einem schwarzen Sektor erhält man keinen Gewinn.

Der Erwartungswert, der berechnet werden soll ist die durchschnittlich, auf lange Sicht zu erwartende Auszahlungsbetrag.
Die Zufallswerte sind '5', '1' und '0', also die Auszahlungsbeträge bei den verschiedenen Sektoren. Nimmt man die Sektorenanzahl als Schätzgrundlage für das Vorkommen eines dieser Auszahlungen, dann bekommt man 5 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{5}$, einen Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{2}{5}$ und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit bekommt man nichts ausgezahlt.
Damit lässt sich nun rechnen:

$$\begin{aligned}\mu &= 5 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{5} + \frac{2}{5} + \frac{0}{5} \\ &= \frac{7}{5} = 1,4\end{aligned}$$

Auf lange Sicht wird man also bei diesem Spiel pro Teilnahme 1,40 € ausgezahlt bekommen.

Aufgaben

A137. Bei einem Würfelspiel wird mit zwei normalen Spielwürfeln gewürfelt. Würfelt man einen Pasch, dann erhält man die einfache Ausgenzahl[13] in Euro ausgezahlt. Zeigen die beiden Würfel eine unterschiedliche Puktzahl, muss man 10ct (=0,1€) bezahlen.
Berechne den zu erwartenden Auszahlungsbetrag.

26.3.1.1 Das faire Spiel

Im Zusammenhang mit dem Erwartungswert steht der Begriff des fairen Spiels. Ein Spiel wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung dann fair genannt, wenn es weder Gewinner noch Verlierer gibt. Bei Spielen, bei denen es Geldeinsätze und Geldauszahlungen gibt, heißt ein Spiel dann fair, wenn der Erwartungswert des Spiels Null ist. Hierbei gibt es zwei Sichtweisen, die an einem Beispiel erläutert werden sollen:

> Bei einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Zeigen beide Seiten eine Zahl, erhält der Spieler 2 Euro. Zeigen sie unterschiedliche Seiten, erhält der SPieler einen Euro. Bei zwei Köpfen geht der Spieler leer aus.
> Um an dem Spiel teilnehmen zu können, muss der Spieler vorher einen Betrag von einem Euro bezahlen.

Wenn man nun untersuchen will, ob dieses Spiel fair ist, dann kann man sich entweder für den zu erwartenden Auszahlungsbetrag interessieren, der sollte dann bei einem fairen Spiel gleich dem Betrag sein, den man einsetzen muss, also einen Euro.
Die Berechnung ist dann:

$$\mu = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Das Spiel ist also fair, weil man durchschnittlich einen Euro gewinnen wird und damit den eingesetzten Eur wieder heraus bekommt.
Oder man rechnet den zu zahlenden Betrag sofort mit ein. Die Bilanz ist dann bei zwei Zahlen 1 € , denn man muss ja erst einen Euro bezahlen und bekommt dann zwei zurück. Bei unterschiedlichen Seiten ist er Null und bei zwei Köpfen -1. Nun ist die Rechnung

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{2}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Hier beschreibt der Erwartungswert, was man auf lange Sicht hin ausgibt oder gewinnt und auch hier ergibt sich, dass das Spiel fair ist.

---
[13] Also bei einem Einser-Pasch einen Euro, einem Zweier-Pasch zwei Euro, usw.

Aufgaben

A138. Ein Glücksrad hat sechs gleich große Sektoren. Einer ist rot, zwei sind grün und drei sind schwarz. Kommt 'rot' erhält man 2 Euro. kommt 'grün', erhält man einen Euro, bei 'schwarz' erhält man nichts.
Um an dem Spiel teilnehmen zu können muss man einen Euro bezahlen.
Entscheide, ob das Spiel fair ist.

A139. Zum Sommerfest der Schule will die SV eine Tombola durchführen. Dazu werden in eine Urne vor jedem Spiel eine weiße, zwei schwarze, drei rote und vier grüne Kugeln gelegt, aus der der Spieler eine Kugel entnehmen darf.
Bei der weißen Kugel bekommt der Spieler 5 € , bei einer schwarzen 2 € und bei einer roten Kugel einen Euro. Bei einer grünen Kugel erhält der Spieler keinen Gewinn.
Berechne, welchen Wert die SV pro Spiel pro Spiel verlangen darf, wenn das Spiel fair sein soll.

A140. Um an einem Lottospiel teilnehmen zu können muss ein Spieler einen Euro bezahlen. Er gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = \frac{1}{4}$ einen Euro, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_2 = \frac{1}{8}$ zwei Euro und mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_x = \frac{1}{16}$ x Euro. In allen anderen Fällen gewinnt er nichts.
Gib an wie groß der Auszahlungsbetrag x sein muss, damit das Spiel fair ist.

26.3.2 Standardabeichung

Weiter oben wurde schon die empirische Standardabweichung berechnet. Hat man die Zufallswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit dem Mittelwert $\overline{x}$, dann ist sie gleich

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Wie schon beim Mittelwert kann man die Sache auch ändern, wenn manche der Zufallswerte mehrfach vorkommen. Dann kommt jedem Zufallswert x_i die relative Häufigkeit r_i zu und die empirische Standardabweichung ist dann:

$$s = \sqrt{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot r_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot r_2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot r_n}$$

Sind nun für die möglichen Zufallswerte die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bekannt, dann gilt:

> Kommen die möglichen Zufallswerte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor und ist μ der Erwartungswert des Zufallsexperiments, dann heißt
>
> $$\sigma = \sqrt{(X_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (X_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (X_n - \mu)^2 \cdot p_n}$$
>
> die **Standardabweichung** dieses Zufallsexperiments.

Die Standardabweichung wird erst im Zusammenhang mit den sogenannten Sigma-Intervallen interessant und soll auch erst dann wieder angesprochen werden. Es gibt darüber hinaus Fälle, in denen sich die Standardabweichung sehr einfach berechnet lässt, aber auch dazu erst später mehr.

26.4 Fachbegriffe

Durchschnitt

Ein anderes Wort für das arithmetische Mittel.

Empirische Standardabweichung

Ein Streumaß für Daten der Statistik. Es dient ausschließlich als Vergleichsmaß. Ist die empirische Standardabweichung bei einer Datenmenge größer als bei einer anderen, dann sind die Abweichungen der Werte vom Mittelwert in der ersten Gruppe größer als in der zweiten Datengruppe.

Erwartungswert

Entspricht dem arithmetischen Mittel. Allerdings wird mit dem Wahrscheinlichkeiten der Zufallswerte gerechnet und nicht mir den relativen H"aufigkeiten.

Mittelwert
Alltagsbegriff für das arithmetische Mittel. Es wird berechnet, indem man alle vorkommenden Zahlwerte addiert und das Ergebnis durch die Anzahl der Zahlen dividiert.

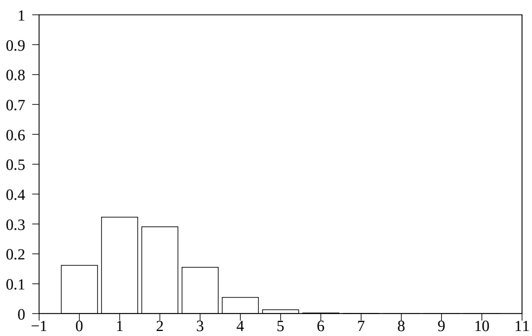
Standardabweichung
Entspricht der empirischen Standardabweichung in der Statistik, wird aber mit Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Zufallswert
Der Zufallswert ist eine Zahl, die (willkürlich) einem Ergebnis eines Zufallsversuchs zugeordnet wird.

27 Verteilungen

27.1 Grundsätzliches

Waren die bisherigen Inhalte zumeist noch recht gut nachvollziehbar und verständlich, so kommt nun ein Bereich, der schon **sehr** abstrakt ist, die **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**. Dabei sind diese Verteilungen das A und O der Stochastik und es sind nicht nur schon eine ganze Reihe von (unterschiedlichen) Verteilungen identifiziert[1], aber es kommen immer noch neue hinzu. Ein ganzer Teilbereich der Stochastik beschäftigt sich nur mit der Frage, wie ein Zufallswert verteilt ist und wie man das Vorliegen einer bestimmten Verteilung nachweisen kann, aber das würde hier wirklich zu weit führen.
Um sich klar zu machen, was eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, soll es anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.
Angenommen wir hätten einen ganz normalen Spielwürfel und würfeln 10 mal mit diesem Würfel, wobei wir uns nur dafür interessieren, ob eine 'Sechs' fällt oder ein anderer Wert.
Dieses Experiment führen wir **sehr oft** durch[2]. Dann kann es sein, dass wir einmal in dem Experiment 5 'Sechsen' hatten. Es kann auch mal sein, dass wir 3 'Sechsen' hatten. Vielleicht ist es sogar mal vorgekommen, dass keine 'Sechs' dabei war und es wäre, zumindest theoretisch denkbar, dass auch einmal alle zehn Würfe eine 'Sechs' erbrachten.
Wenn dieses Experiment wirklich sehr oft durchgeführt wurde, dann kann man irgendwann angeben, in wieviel Prozent der Fälle die 10 Würfe keine 'Sechs' enthielten, in wieviel Prozent nur eine 'Sechs', und so weiter bis hin zu der Prozentzahl der Experimente, bei denen alle 10 Würfe 'Sechsen' waren.
Eine solche Angabe, also mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Zufallswert auftritt, nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie wird normalerweise graphisch, in Form eines Balkendiagramms ausgegeben.



Entlang der x-Achse sind die Anzahlen der 'Sechsen' bei den zehn Würfen abgetragen, entlang der y-Achse die zugehörige Wahrscheinlichkeit. Die höchste Wahrscheinlichkeit hat die 1, so daß in den meisten Fällen nur ein Wurf eine 'Sechs' zeigen wird. Ab der Anzahl von 6 'Sechsen' scheint die Graphik leer zu sein, was aber nur daran liegt, dass die Wahrscheinlichkeit bei zehn Würfen 6 oder mehr 'Sechsen' zu würfeln extrem gering ist. Die Wahrscheinlichkeit für 6 'Sechsen' ist tatsächlich nur 0,2%, die Wahrscheinlichkeit, dass alle zehn Würfe eine 'Sechs' bringen sogar nur 0,000002% — kommt also praktisch nicht vor.
Noch mal: Man kann es gar nicht genug betonen! Eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine sehr abtrakte und theoretische Angelegenheit, was klar wird, wenn man versucht es in Worte zu fassen. Ich habe oben geschrieben, dass die Wahrscheinlichkeit mit zehn Würfen 6 'Sechsen' zu werfen, 0,2% beträgt. Ausführlich formuliert müsste der Satz lauten:
Wenn man das Zufallsexperiment des 10fachen Würfelwurfes unendlich oft durch führen würde, würden bei 0,2% der Experimente 6 'Sechsen' im Ergebnis vorkommen. Die Anzahl der 'wenn', 'würde', 'wäre' zeigt deutlich, *wie* abstrakt so eine Verteilung ist. Dennoch sind sie Grundlage der meisten statistischen Verfahren[3].

[1] Binomialverteilung, Normalverteilung, Student-t Verteilung, F-Verteilung, Chi-Quadrat-Verteilung, um nur einige zu nennen.

[2] Und damit ist wirklich sehr oft gemeint — in der Vorstellung der Stochastik unendlich oft!

[3] Es soll allerdings nicht verschwiegen werden, dass selbst hochkarätigen Statistikern an den Universitäten die Sache allmählich zu abstrakt und abgehoben wird. Die akteulle Forschung beschäftigt sich intensivst damit andere Verfahren zu finden.

27.2 Die Binomialverteilung

Die wichtigste, und im Grundkurs einzige Verteilung, die in der Schule behandelt wird, ist die **Binomialverteilung**. Ihre Grundlage ist das Bernoulli-Experiment, das gleichvorgestellt werden wird.

27.2.1 Das Bernoulli-Experiment

Weiter oben wurden schon die Laplace-Experimente vorgestellt[4]. Auch die Bernoulli-Experimente stellen einen Teil der Zufallsexperimente dar.

> Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat.
> Üblicherweise nennt man das eine Ergebnis 'Treffer' und das andere 'Niete'. Hat 'Treffer' die Wahrscheinlichkeit 'p', dann hat 'Niete' die Wahrscheinlichkeit '$q = 1 - p$'.

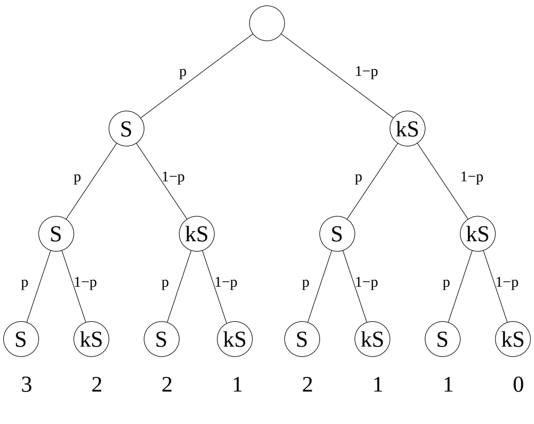
Viele Experimente lassen sich als Bernoulli-Experimente auffassen. Das Würfeln mit einem normalen Spielwürfel hat sechs mögliche Ergebnisse, ist also **kein** Bernoulli-Experiment. Interessiert man sich nur dafür, ob man eine 'Sechs' würfelt oder nicht, dann gibt es nur noch die Ergebnisse 'Sechs' und 'keine Sechs' — dann **ist** es ein Bernoulli-Experiment. Analog lassen sich sehr viele weitere Beispiele finden und dann igbt es natürlich noch die Zufallsexperimente, die per se Bernoulli-Experimente sind, wie etwa der Münzwurf.
Weil sie nur zwei mögliche Ergebnisse (und damit auch nur zwei Wahrscheinlichkeiten, die sich sogar auseinander berechnen lassen) haben, sind sie sehr einfach und in vielerlei Hinsicht vereinfachen sich die Berechnungen. Und auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei mehrfacher Durchführung lässt sich (einfach) berechnen.

27.2.2 Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit

Wenn man sich die Einfachheit von (mehrfachen) Bernoulli-Experienten klar machen will, dann sollte man sich einmal ein einfaches Beispiel ansehen.

> *Bei einem Zufallsexperiment wird ein normaler Spielwürfel dreimal geworfen. Bei den Ergebnissen wird nur notiert, ob eine 'Sechs' (S) gefallen ist, oder nicht (kS).*

Das Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment ist schnell gezeichnet.



Da die gesamte Situation ein bisschen allgemeiner betrachtet werden soll, habe ich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer 'p' genannt und die für eine Niete '$1 - p$”'. Da weiterhin nur interessiert, wieviele 'Sechsen' geworfen wurden, habe ich auch die Ergebnisse nicht angegeben, sondern nur die Anzahl der 'Sechsen' im Ergebnis. Ganz links steht (eigentlich) das Ergebnis 'SSS', also drei Sechsen. An dieser Stelle ist daher die '3' notiert.

[4] Das waren die, bei denen jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hatte, man also die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses einfachabschätzen konnte.

Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung geht es um die Frage wieviele Treffer ich pro Ergebnis habe[5]. Dazu soll eine dieser Anzahlen hier einmal genauer untersucht werden. Daher geht es im folgenden um die Frage:

> *Wie wahrscheinlich ist es, bei drei Würfelwürfen genau einmal eine 'Sechs' zu werfen?*

Bei der Beispielaufgabe sind also die Ergebnisse 'S,kS,kS', 'kS,S,kS' und 'kS,kS,S' interessant. Betrachten wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} p(S,kS,kS) &= p\cdot(1-p)\cdot(1-p) \\ p(kS,S,kS) &= (1-p)\cdot p\cdot(1-p) \\ p(kS,kS,S) &= (1-p)\cdot(1-p)\cdot p \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist in allen drei Fällen gleich, was, gemäß der Pfadmultiplikationsregel auch nicht verwunderlich ist, denn einmal geht man einen Pfad in Richtung 'S' und zweimal muss man in Richtung eines Pfades 'kS' gehen. Insgesamt gilt also:

$$p(\text{eine Sechs}) = p^1\cdot(1-p)^2$$

Nun wird es langsam einmal interessant sich anzusehen, welche Zahlen denn überhaupt an dieser Rechnung beteiligt sind. Da ist zunächst die

Anzahl der Versuche: n

Anzahl der 'Treffer': k

Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: p

Mit diesen Bezeichnungen kann man nun sehr einfach schreiben: Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei dem n-maligen Durchführen eines Bernoulli-Versuchs 'k' Treffer hat ist:

$$p(\text{k Treffer}) = p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Was nun noch fehlt ist die Beantwortung der Frage, wieviele Pfade es denn gibt, die 'k' Treffer haben. Wie oben zu sehen war, gab es etwa drei Pfade, die zu einem Ergebnis führten, das eine 'Sechs' enthält. Wie kommt man an die '3'?
Diese Frage entspricht der Frage, auf wieviel unterschiedliche Arten man man mit einem Griff diese Pfade von allen ziehen kann. Diese Anzahl ist schon bekannt, es sind $\binom{3}{1}$.
Für den obigen Fall soll das einmal durchgerechnet werden. Es waren 3 Würfe, also $n = 3$. Gesucht wurden die Anzahl der Ergebnisse, die eine 'Sechs' enthielten, das ist:

$$\begin{aligned} \binom{3}{1} &= \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} \\ &= \frac{3!}{1!\cdot 2!} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1 \quad\cdot\quad 1\cdot 2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Es reicht hier zu wissen, dass wirklich die richtige Anzahl Pfade heraus kommt. Insgesamt gilt:

27.2.3 Die binomiale Wahrscheinlichkeit und ihre Verteilung

Wird ein Bernoulli-Experiment 'n'-mal durchgeführt und ist die Trefferwahrscheinlichkeit 'p', dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Ergebnis 'k'-mal ein Treffer vorkommt:

$$p(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anz. Pfade}} \cdot \underbrace{p^k\cdot(1-p)^{n-k}}_{\text{Einzelwahrsch.}}$$

[5] In diesem Beispiel gibt es: Keine Sechs, eine Sechs, zwei Sechsen oder drei Sechsen.

Die meisten modernen und in der Oberstufe zugelassenen Taschenrechner beherrschen diese Formel auf Knopfdruck, aber dennoch sollen hier mal ein paar Beispiele 'per Hand' durchgerechnet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 10maligem Würfeln mit einem normalen Spielwürfel keine 'Sechs' würfelt?
Nun, die Anzahl 'n' ist 10, denn das ist die Anzahl der Versuche. Darunter sollen 0 ('k') Treffer sein und die Wahrscheinlichkeit mit einem normalen Spielwürfel eine 'Sechs' zu würfeln ist $p = \frac{1}{6}$. Damit sint 'n', 'k' und 'p' bekannt und es gilt:

$$\begin{aligned} p(X=0) &= \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-0} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &= \frac{9765625}{60466176} \approx 0,16150 \\ &= 16,15\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 16% wird man also bei 10 Würfen keine einzige Sechs werfen. Wie groß ist denn die Wahrscheinlichkeit genau 3 'Sechsen' zu werfen[6]:

$$\begin{aligned} p(X=3) &= \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-3} \\ &= 120 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= 120 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{78125}{279936} \\ &= \frac{390625}{2519424} \approx 0,1550 \\ &= 15,5\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit bei den 10 Würfen drei 'Sechsen' zu werfen ist also sogar noch etwas kleiner, nämlich nur 15,5%.

Aufgaben

A141. Identifiziere bei den folgenden Aufgaben 'n', 'k' und 'p' und berechne dann mit dem Taschenrechner die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

a) Eine Münze wird 20 mal geworfen. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass 3 mal 'Kopf' kommt?

b) In einem normalen Skat-Blatt sind 32 Karten. Davon sind vier 'Buben'.
Aus einem Skatblatt wird zufällig eine Karte gezogen. Dieses Experiment wird 10 mal durchgeführt. Gib die Wahrscheinlichkeit an viermal einen Buben zu ziehen?

c) Eine Firma bekommt Glühlampen in Kartons mit 100 Stück geliefert. Erfahrungsgemäß sind 5% der Glühbirnen defekt. Gib die Wahrschenlichkeit dafür an, dass unter 10 zufällig aus einem Karton ausgewählten Glühbirnen 2 defekte sind.

27.2.4 Kumuliert

Kehren wir noch einmal zu der letzten Aufgabe zurück:
Ein normaler Spielwürfel wird 10 mal geworfen und es interessiert die Anzahl der 'Sechsen'.
Offenbar ist $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$, aber nun soll die Fragestellung etwas geändert werden. Wir interessieren und nicht mehr dafür, das keine oder drei Sechsen geworfen werden, sondern wir wollen wissen wie groß die Wahrscheinlichkeit ist **höchstens** 3 'Sechsen' zu werfen.
Will man diese Aufgabe 'per Hand' lösen, dann müsste man die vier Wahrscheinlichkeiten $p(X = 0)$, $p(X = 1)$, $p(X = 2)$ und $p(X = 3)$ berechnen und schließlich addieren. Glücklicherweise nimmt uns diese Arbeit ebenfalls der Taschenrechner ab[7]. Man nennt diese Werte auch **kumulierte Wahrscheinlichkeit**[8]. Mit dieser Funktion kann man dann sofort ausrechnen:

$$p(X \leq 3) = 0,9302\ldots$$

[6] Sonst bleibt alles andere gleich.

[7] Hat man keinen entsprechenden Taschenrechner zu Hand, oder weiß nicht, wie man ihn bedienen muss, dann findet man im Internet auch Tabellen mit den Werten von vielen Binomialverteilungen.

[8] Kumulieren = Zusammenfassen, auf einen Haufen legen.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 93% wird man also keine, eine, zwei oder drei 'Sechsen' werfen.
Mit der kumulierten Wahrscheinlichkeit lässt sich aber auch ausrechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man **mindestens** eine gewisse Anzahl von Treffern erreicht. Dazu braucht man nur die Regel für das Gegenereignis.
Will man etwa wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist bei obigem Experiment mindestens 3 'Sechsen' zu würfeln, dann ist das Gegenereignis, dass man keine, eine oder zwei 'Sechsen' Würfelt. Damit ist:

$$\begin{aligned} p(X > 3) &= 1 - p(X \leq 2) \\ &= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)] \\ &= 1 - 0,7752\ldots \\ &= 0,2247\ldots \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 22,5% wird man also drei oder mehr 'Sechsen' würfeln.

> Will man bei einer binomial verteilten Zufallsgröße wissen wie groß die Wahrscheinlichkeit für **höchstens** k Treffer ist, dann rechnet man mit der kumulierten Wahrscheinlichkeit.
> Will man die Wahrscheinlichkeit von **mindestens** k Treffern berechnen, dann rechnet man mit dem Gegenereignis und dann mit der kumulierten Wahrscheinlichkeit.

Keine Panik!

28 Lösungen zu den Voraussetzungen

28.1 Aufgaben zu Zahlen

A1.

a)	10	b)	13	c)	7
d)	13	e)	4	f)	2
g)	14	h)	11	i)	7
j)	32	k)	15	l)	21

28.2 Aufgaben zu Termen

A2. $T(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad T(-1) = 1, \quad T(2) = 7, \quad T(3) = 9, \quad T(10) = 23, \quad T(20) = 43$

A3. $T(1) = 2, \quad T(2) = 6, \quad T(3) = 12, \quad T(-5) = 20, \quad T(10) = 110, \quad T(100) = 10100$

A4. $T(1) = 3, \quad T(-1) = -3, \quad T(3) = 17, \quad T(-5) = 9, T(10) = 129$

A5. $T(0;0) = 0, \quad T(1;0) = 1, \quad T(3;2) = 21, \quad T(-5;12) = -95$

A6.

a) $T(x) = x \cdot (x+1) = x^2 + x$

b) $T(x) = 2 \cdot x + 1$

c) $T(x) = x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$

A7.

a) Summenterm

b) Differenzterm (Punkt- vor Strichrechnung!)

c) Zahlterm

d) Summenterm

e) Differenzterm, da von links nach rechts gerechnet wird.

f) Quotiententerm

g) Produktterm (erst wird der Wert des Bruchs ermittelt und der erst dann mit 3 multipliziert!)

h) Quotiententerm

i) Variablenterm

28.3 Aufgaben zu Termumformungen

A8.

a)	$3a$	b)	x	c)	$5ab + 7bc$
d)	$4a + 6b$	e)	$4x - 3y$	f)	$5a + 2c$
g)	$5ab$	h)	$3x^2 + 5x$	i)	$-ab + bc + cd$

A9. Zusätzlich zum Auflösen der Klammern werden in dieser Lösung auch die entstehenden Terme noch zusammen gefasst.

a)
$$\begin{aligned} a + (8 + 5a) &= a + 8 + 5a \\ &= 6a + 8 \end{aligned}$$

b)
$$x + (y + z) = x + y + z$$

c)
$$\begin{aligned} 5 + (2a + 3) &= 5 + 2a + 3 \\ &= 8 + 2a \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + (\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{7} + (\tfrac{3}{7}a + \tfrac{5}{7}) &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{3}{7}a + \tfrac{5}{7} \\ &+ \tfrac{6}{7} + \tfrac{3}{7}a \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 0,3x + (2,1x + 5,3 - 1,9x) &= 0,3x + 2,1x + 5,3 - 1,9x \\ &= 0,5x + 5,3 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 3a + (2a + 3) + (6 - 5a) &+ 3a + 2a + 3 + 6 - 5a \\ &= 9 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 5x + (-2x + 3y) + (5x + 2y) &= 5x - 2x + 3y + 5x + 2y \\ &= 8x + 5y \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} (-3a + 5b - c) + (4a + 3c - 7b) + (a - b - c) &= -3a + 5b - c + 4a + 3c - 7b \\ &\quad +a - b - c \\ &= 2a - 3b + c \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} (3x + 2y) + (5x - 2y) + (3a + b) &= 3x + 2y + 5x - 2y + 3a + b \\ &= 8x + 3a + b \end{aligned}$$

A10. Im Gegensatz zur letzten Aufgabe werden hier nur die zusammengefassten Ergebnisse angegeben. Das macht die Sache spannender!

a)	$-a+3b$	b)	$5x+5y$
c)	$-4r-6s$	d)	$7x+5y$
e)	$\frac{5}{3}y$	f)	$0,5a+4,3b$
g)	$a+3b-2c$	h)	$3u-v$

A11.

a)	$2x-[3x+2y-4x-2y]$	b)	$3a+[2b-3a-5b-2a]$
	$2x-3x-2y+4x+2y$		$3a+2b-3a-5b-2a$
	$3x$		$-2a-3b$
c)	$-[-2x-3y-3x-2y]$	d)	$[3r-2s+3t-5t+2r-5s]$
	$2x+3y+3x+2y$		$3r-2s+3t-5t+2r-5s$
	$5x+5y$		$5r-7s-2t$

A12.

a)	$6ab+10ac$	b)	$8r^2-12rs$	c)	$6ax+9bx$
d)	$6a^2bc+8ab^2c-14abc^2$	e)	$9x^2-6xy+9xz$	f)	$-26uv^2w+39u^2vw-52u^2v^2$

A13.

a)	$2a^2-ab+2b^2$
b)	$-26a^2bc+23ab^2c+31abc^2$
c)	$3x-8x^2+16xy+15y^2$
d)	$36a^b-44ab^2+12a^3+18b^3$

A14.

a)	$ax+ay+bx+by$	b)	$6ax-4bx-3ay+2by$
c)	$2a^2-ab+6ac-3b^2+bc+4c^2$	d)	$6x^2+13xy-17xz-6y^2+13yz-5z^2$
e)	$28x^3-37x^2y-27xy^2$		

A15.

a)	$a^2+2ab+b^2$	b)	$x^2-2xy+y^2$	c)	r^2-s^2
d)	$x^2+2xy+y^2$	e)	$u^2-2uv+v^2$	f)	$4a^2-b^2$
g)	$4a^2+12ab+9b^2$	h)	$9x^2-24xy+16y^2$	i)	$16r^2-9s^2$

A16.

a)	$a(a+5)$	b)	$x(x-7)$	c)	$p(1-p)$
d)	$7p(3a+5b)$	e)	$4q^2(2q-2p)$	f)	$17s(3r-7s)$
g)	$8m^2(m^2+3)$	h)	$9v^2(2-2v)$	i)	$9c^2de^2(4c-3d)$
j)	$3mn(6mn+2n+7m)$	k)	$3p^2q^2(4pq-5p^2+7q^2)$	l)	$9cd^2(2c^2-3cd+5d^2)$

28.4 Aufgaben zu Gleichungen

A17.

a)	$x=5$	b)	$x=-2$	c)	$x=\frac{11}{4}=2,75$
d)	$x=2$	e)	$x=-\frac{49}{9}=-5.\overline{4}$	f)	$x=-\frac{48}{79}\approx-0.6076$

A18.

a)	$x=0$	b)	$x=\frac{47}{10}=4,7$	c)	$x-\frac{1}{4}=0,25$
d)	$x=7$	e)	$x=3$	f)	$x=-\frac{11}{6}=-1,8\overline{3}$

A19.

a)	$x=\frac{17}{5}=3,4$	b)	unlösbar
c)	allgemeingültig	d)	allgemeingültig
e)	$x=\frac{17}{2}=8,5$	f)	unlösbar

A20. Das Zeichen '$\vee$' ist eine in der Mathematik gebräuchliche Abkürzung für '*oder*'.

a)	$x=3\vee x=-3$	b)	unlösbar	c)	$x=15\vee x=-15$
d)	$x=\frac{1}{2}\vee x=-\frac{1}{2}$	e)	$x=0,9\vee x=-0,9$	f)	$x=0,31\vee x=-0,31$
g)	unlösbar	h)	$x=6\vee x=-6$	i)	unlösbar

A21.

a)	$x=0\vee x=8$	b)	$x=0\vee x=-10$	c)	$x=0\vee x=-\frac{1}{2}$
d)	$x=0\vee x=2$	e)	$x=0\vee x=-4$	f)	$x=0\vee x=3$

A22.

a)	$x = 1 \vee x = 3$	b)	$x = 5 \vee x = 7$
c)	$x = -1 \vee x = 5$	d)	$x = -2 \vee x = -7$
e)	$x = 0,1 \vee x = 0,3$	f)	$x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{4}$
g)	$x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{4}$	h)	$x = 1,2 \vee x = 2,1$
i)	$x = 2 \vee x = 10$	j)	unlösbar
k)	$x = 3$	l)	$x = 17 + 2\sqrt{69} \approx 33,31 \vee x = 17 - 2\sqrt{69} \approx 0,39$

A23.

a)	$x = -20 \vee x = 0 \vee x = 10$	b)	$x = -4 \vee x = 0 \vee x = 3$
c)	$x = -\frac{1}{3} \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$	d)	$x = -0,2 \vee x = 0 \vee x = 3,1$

A24.

a)	$x = -10 \vee x = -2 \vee x = 2 \vee x = 10$	b)	$x = -6 \vee x = -3 \vee x = 3 \vee x = 6$
c)	$x = -8 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 8$	d)	$x = -4 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 4$

A25.

a)	$x \approx 3,32\ldots$	b)	$x \approx 0,52\ldots$
c)	$x \approx 1,79\ldots$		

Für die Aufgabe d) ist ein klein wenig Erläuterung nötig:

$$\begin{aligned}
5^x &= 2^x \cdot 3 \\
\frac{5^x}{2^2} &= 3 \\
\left(\frac{5}{2}\right)^x &= 3 \\
\ln\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x\right) &= \ln(3) \\
x \cdot \ln(2,5) &= \ln(3) \\
x &= \frac{\ln(3)}{\ln(2,5)} \approx 1.19\ldots
\end{aligned}$$

28.5 Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen

A26.

a) $\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -7 & 11 \end{array}$

b) $\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 & 13 \end{array}$

d) $\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{array}$

e) $\begin{array}{rr|r} 2 & 7 & 12 \\ 5 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 14 \end{array}$

f) $\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}$

A27.

a) Eine Lösung
b) Keine Lösung
c) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 1
d) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 1
e) Eine Lösung
f) Keine Lösung

A28.

a) $a = 1, b = 0, c = 2$

b) Unendlich viele Lösungen. Bei dieser Aufgabe ist zusätzlich interessant, dass $c = \frac{3}{2}$ sein **muss**, aber dennoch unendlich viele Lösungen (für a und b) möglich bleiben!
c) Unlösbar
d) Unlösbar
e) $x = -1, y = -1, z = -1$
f) Unendlich viele Lösungen
g) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = 5$
h) Unendlich viele Lösungen, Freiheitsgrad 2!

A29.
a) $a = \frac{1}{7}$
b) Unlösbar
c) $a = -10, b = 6$
d) Unlösbar
e) Unendlich viele Lösungen
f) Unlösbar

A30.
a) $x = 1, y = 0$ am besten mit dem Einsetzungsverfahren
b) $x = 10, y = 2$
c) $x = \frac{1}{2}, y = 3$
d) Keine Lösung
e) Unendlich viele Lösungen
f) $a = 2, b = -2$
g) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$
h) $x = -.2, y = 0.7$
i) Keine Lösung

28.6 Textaufgaben

28.6.1 Zahlrätsel

A31. Gesucht werden zwei Zahlen. Die kleinere soll k genannt werden.

$$\begin{aligned} k + k + 23 &= 47 \\ 2k &= 24 \\ k &= 12 \end{aligned}$$

Die kleinere Zahl it 12, die zweite ist 35.

A32. Gesucht sind zwei Zahlen, die kleinere soll k genannt werden

$$\begin{aligned} 3k + 2 \cdot \frac{2}{3}k &= 65 \\ 3k + \frac{4}{3}k &= 65 \\ \frac{13}{3}k &= 65 \\ k &= 15 \end{aligned}$$

Die kleinere Zahl ist 15, die größere 10.

A33. die Summe von $17p^2$ und $9p^3 \div p^2$ ist:

$$17p^2 + 9p^3 \div p^2 = 17p^2 + 9p$$

Die Differenz von $21p$ und $4p^3 \div 0,5p$ ist

$$21p - 4p^3 \div 0,5p = 21p - 8p^2$$

Man muss also $4p - 17p^2$ addieren.

A34. Gesucht ist eine Zahl, die z genannt werden soll

$$\begin{aligned} z - 17 &= 39 - z \\ 2z &= 56 \\ z &= 28 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist 28.

A35. Gesucht ist ein Geldbetrag, der g genannt werden soll.

$$\begin{aligned} g &= \frac{1650 - \frac{2}{5} \cdot 1650}{2} \\ g &= 495 \end{aligned}$$

Die letzte Rate beträgt 495 Euro.

A36. Gesucht sind die zwei Ziffern einer Zahl. Die Einerziffer soll e genannt werden. Wegen der Quersumme ist dann die Zehnerziffer: $12 - e$.

$$\begin{aligned} 10(12 - e) + e + 18 &= 10e + 12 - e \\ 120 - 10e + e + 18 &= 9e + 12 \\ -9e + 138 &= 9e + 12 \\ 126 &= 18e \\ 7 &= e \end{aligned}$$

Die Einerziffer ist 7, die Zehnerziffer 5, die gesuchte Zahl ist 57.

A37. Gesucht werden die beiden Ziffern einer zweistelligen Zahl, deren Quersumme 9 ist. 'e' soll die Einerziffer sein, woraus folgt, dass wegen der Quersumme '$9 - e$' die Zehnerziffer ist.
Die Zahl ist dann '$10(9 - e) + e$' und die Zahl mit den vertauschten Ziffern ist: '$10e + 9 - e$'.

$$\begin{aligned} 10e + 9 - e - [10(9 - e) + e] &= \frac{3}{4}[10(9 - e) + e] \\ 9e + 9 - (90 - 10e + e) &= \frac{3}{4}(90 - 10e + e) \\ 9e + 9 - 90 + 10e - e &= \frac{3}{4}(90 - 9e) \\ 18e - 81 &= \frac{3}{4}(90 - 9e) \\ 4(18e - 81) &= 3(90 - 9e) \\ 72e - 324 &= 270 - 27e \\ 99e &= 594 \\ e &= 6 \end{aligned}$$

Die Einerziffer ist 6 und daher die Zehnerziffer 3. Die gesuchte Zahl ist 36.

28.6.2 Altersangaben

A38. Gesucht sind zwei Altersangaben. Das Alter des Enkels soll e heißen.

$$\begin{aligned} 3(e - 10) &= 100 - e - 10 \\ 3e - 30 &= 90 - e \\ 4e &= 120 \\ e &= 30 \end{aligned}$$

Der Enkel ist 30 Jahre und der Großvater 70 Jahre alt.

A39. Gesucht sind zwei Jahreszahlen. Das Alter der Steinernen Brücke in Regensburg im Jahr 2000 soll r genannt werden.

$$\begin{aligned} r + 2000 - 280 &= 3r \\ 1720 &= 2r \\ 860 &= r \end{aligned}$$

Die Brücke Regensburg wurde $2000 - 860 = 1140$ gebaut, die Brücke in Izmir 860 v.Chr.

A40. Die Aufgabe scheint sinnlos zu sein, aber wenn man sie '*straight forward*' rechnet, kommt man doch auf die Lösung:
Gesucht sind zunächst einmal zwei Alter, das der Mutter und das des Kindes. Das Alter des Kindes soll 'k' genannt werden, die Mutter ist dann '$k + 21$'. In sechs Jahren werden das Kind '$k + 6$' Jahre alt sein und die Mutter: '$k + 21 + 6 = k + 27$'.

$$\begin{aligned}
5(k+6) &= k+27 \\
5k+30 &= k+27 \\
4k &= -3 \\
k &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Das Kind ist also $-\frac{3}{4}$ Jahre = minus neun Monate alt. Der Vater hat also die Mutter gerade sehr, sehr lieb!

28.6.3 Verteilungsaufgaben

A41. Gesucht sind drei Geldbeträge. Der Gesamtgewinn der drei Familien soll mit g bezeichnet werden.

$$\begin{aligned}
g - \frac{1}{5}g - \frac{3}{10}g - \frac{2}{5}g &= 5200 \\
\frac{1}{10}g &= 5200 \\
g &= 520000
\end{aligned}$$

Die erste Familie erhielt $\frac{1}{5} \cdot 52000 = 10400$, die zweite Familie $\frac{3}{10} \cdot 52000 = 15600$ und die dritte Familie $2 \cdot 10400 = 20800$ Euro.

A42. Da D ein Fünftel (= 24000 Euro) erhält, sind noch drei weitere Geldbeträge gesucht. Der Betrag für A wird a genannt.

$$\begin{aligned}
a + a + 6000 + 3(2a+6000) &= 96000 \\
8a + 24000 &= 96000 \\
8a &= 72000 \\
a &= 9000
\end{aligned}$$

A erhält 9000 Euro, B demnach 17000 und C 78000 Euro.

A43. Gesucht sind zwei Fahrgastzahlen. Die in der U1 sollen u heißen.

$$\begin{aligned}
u - 12 - 4 &= 3(72-u) \\
u - 16 &= 216 - 3u \\
4u &= 232 \\
u &= 58
\end{aligned}$$

In der U1 fuhren 58 und in der U2 14 Fahrgäste.

A44. Gesucht werden zwei Anzahlen. Die Anzahl der Frauen soll f genannt werden.

$$\begin{aligned}
f + 37 = 3f - 1& \\
4 &= 2f \\
2 &= f
\end{aligned}$$

Zu Beginn waren es 2 Frauen und 6 Männer.

A45. Gesucht ist ein Alter, das mit a bezeichnet werden soll.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{7}a + \frac{1}{6}a + 23 &= a \\
19/over42a + 23 &= a \\
23 &= \frac{23}{42}a \\
42 &= a
\end{aligned}$$

Sokrates ist 42 Jahre alt.

A46. Gesucht ist die Meerestiefe. Die Höhe der gesamten Bohrplattform soll h genannt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7}h + \frac{3}{5}h + 27 &= h \\
\frac{26}{35}h + 27 &= h \\
27 &= \frac{9}{35}h \\
105 &= h
\end{aligned}$$

Da drei Fünftel im Wasser stehen, ist das Meer $\frac{3}{5} \cdot 105 = 63$ Meter tief.

A47. Gesucht ist die Gesamtzahl der Schüler, die g genannt werden soll.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}g + \frac{1}{4}g + 54 + 270 &= g \\ \frac{1}{2}g + 324 &= g \\ 324 &= \frac{1}{2}g \\ 648 &= g \end{aligned}$$

Es sind 648 Schüler auf dem Gymnasium.

A48. Gesucht sind zwei Geldbeträge, der eine soll g genannt werden.

$$\begin{aligned} \frac{3}{100}g + \frac{4}{100}(12000 - g) &= 418 \\ 3g + 4(12000 - g) &= 41800 \\ 3g + 48000 - 4g &= 41800 \\ -g &= -6200 \\ g &= 6200 \end{aligned}$$

Der eine Teil ist 6200 Euro und der andere 5800 Euro groß.

28.6.4 Mischungsaufgaben

A49. Gesucht ist der Salzgehalt, der s genannt wird.

$$\begin{aligned} 0.2 \cdot 2 &= s \cdot 8 \\ s &= 0.05 \end{aligned}$$

Es sind nun 5%.

A50. Gesucht ist eine Literangabe, die l genannt wird.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0.8 &= (3 + l) \cdot 0.3 \\ 2.4 &= 0.9 + 0.3l \\ 1.5 &= 0.3l \\ 5 &= l \end{aligned}$$

Es müssen 5 Liter Wasser hinzugegeben werden.

A51. Gesucht ist eine Literangabe, die l genannt wird.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0.15 + 0.3l &= 0.2 \cdot (5 + l) \\ 0.75 + 0.3l &= 1 + 0.2l \\ 0.1l &= 0.25 \\ l &= 2.5 \end{aligned}$$

Man muss zweieinhalb Liter nehmen.

A52. Gesucht ist der Kilopreis der Mischung, der m genannt wird.

$$\begin{aligned} 12 \cdot 12.60 + 8 \cdot 16.60 &= 20m \\ 284 &= 20m \\ 14.2 &= m \end{aligned}$$

Die Mischung kostet 14,20€ pro Kilo.

A53. Gesucht ist eine Mengenangabe, die m genannt werden soll.

$$\begin{aligned} 100 \cdot 11.5 + 18m &= 13(100 + m) \\ 1150 + 18m &= 1300 + 13m \\ 5m &= 150 \\ m &= 30 \end{aligned}$$

Er muss von der zweiten Sorte 30kg nehmen.

28.6.5 Füllaufgaben

A54. Gesucht ist eine Zeitangabe. Der Anteil der in einer Stunde geleisteten Arbeit soll a genannt werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\\ \frac{1}{a} &= \frac{5}{6}\\ a &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Zusammen brauchen sie eine Stunde und zwölf Minuten.

A55. Gesucht ist eine Zeitangabe. Die Anzahl der Stunden bis zur Füllung soll f genannt werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{15} - \frac{1}{20}\\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{60}\\ f &= 60\end{aligned}$$

Es dauert 60 Stunden bis zur vollständigen Füllung.

28.6.6 Bewegungsaufgaben

A56. Gesucht ist eine Zeitangabe, die z genannt werden soll.

$$\begin{aligned}\frac{25}{z} - 2.5 &= \frac{15}{z-0.5}\\ 25(z-0.5) - 2.5(z^2 - 0.5z) &= 15z\\ 25z - 12.5 - 2.5z^2 + 1.25z &= 15z\\ -2.5z^2 + 11.25z - 12.5 &= 0\\ z &= 2.5 \vee z = 2\end{aligned}$$

Entweder er läuft 2,5 Stunden mit 10km/h oder er läuft 2 Stunden mit 12.5km/h.

28.6.7 Quadrataufgaben

A57. Gesucht sind zwei Anzahlen. Die Anzahl der Fahrten des kleinen LKW soll k genannt werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{20} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k-9}\\ k^2 - 9k &= 20(k-9) + 20k\\ k^2 - 9k &= 20k - 180 + 20k\\ k^2 - 49k + 180 &= 0\\ k &= 4 \vee k = 45\end{aligned}$$

Da bei der Lösung $k = 4$ der große LKW eine negative Anzahl von Fahrten fahren müsste, kann es nur so sein, dass der kleine LKW alleine 45 Fahrten und der große 36 Fahrten braucht.

28.6.8 Verschiedene Aufgaben

A58. Natürlich ist Fritz 18 Jahre alt[1]

[1] Wer mir ials erster die dazu gehörige Gleichung bringt, bekommt ein Eis aus!

Keine Panik!

29 Lösungen zur Analysis

29.1 Aufgaben zu Funktionen

A59.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	-8	-5	-2	1	4	7

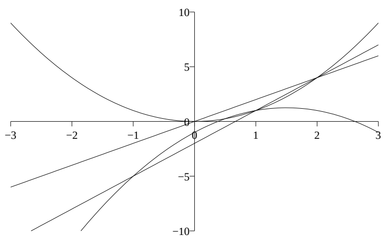
c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

a) d

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-19	-11	-5	-1	1	1	-1

A60.



A61. Eine mathematische Funktion ergibt immer nur **einen** Funktionswert. Daher kann ober- oder unterhalb eines x-Wertes immer nur **ein** Punkt stehen!

29.2 Aufgaben zu den Eigenschaften aller Funktionen

A62.

a)	y-Achsen-Abschnitt : 7	b)	y-Achsen-Abschnitt : 2
c)	y-Achsen-Abschnitt : 0	d)	y-Achsen-Abschnitt : 2

A63.

a)	$x = -\frac{3}{2} = -1,5$	b)	$x = 3$
c)	$x = 14$	d)	$x = 2 \vee x = 4$

A64.

a) Hier gilt:

$$x^2 + 2x + 1 = x - 5$$
$$x^2 + x + 6 = 0$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich, dass diese Gleichung keine Lösung hat, daher ist $g(x)$ eine Passante von $f(x)$.

b) Hier ist:

$$2x^2 - 2x + 1 = x + 1$$
$$2x^2 - 3x = 0$$
$$x(2x - 3) = 0$$

Was nach der Regel fürs Nullprodukt bedeutet, dass die Gleichung die Lösungen $x = 0$ und $x = 1,5$ hat. Somit ist die Gerade zu $g(x)$ eine Sekante von $f(x)$.

c) Hier hat

$$x^2 - 5x - 2 = -3x - 3$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

nur die Lösung $x = 1$. Somit ist $g(x)$ eine Tangente an $f(x)$.

29.3 Aufgaben zu linearen Funktionen

A65.

a)	$y\text{AA}: 3$	b)	$y\text{AA}: -7$
c)	$y\text{AA}: -\frac{3}{7}$	d)	$y\text{AA}: -3,14$

A66. Senkrechte Geraden können nicht dargestellt werden, denn sie hätten eine unendliche Steigung!

A67.

a)	$x = 4$	b)	$x = -10$
c)	$x = 2,\overline{6}$	d)	$x = 1$

A68.

a)	$m = -\frac{1}{3}$	b)	$m = \frac{1}{2}$
c)	$m = 3$	d)	$m = -5$

A69.

a) senkrecht, da $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$
b) nicht senkrecht
c) senkrecht
d) nicht senkrecht

A70.

a)	$f(x) = 3x - 2$	b)	$f(x) = -4x - 7$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$	d)	$f(x) = -3x + 21$

A71.

a)	$f(x) = 3x - 7$	b)	$f(x) = -5x - 10$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	d)	$f(x) = 1,2x - 3,4$

A72.

a)	$m = 3$	b)	$m = -4$	c)	$m = -10$
d)	$m = \frac{1}{2}$	e)	$m = -\frac{1}{3}$	f)	$m = 1,2$

29.4 Aufgaben zu quadratischen Funktionen

A73.

a)	$y\text{AA} = 7$	b)	$y\text{AA} = -13$	c)	$y\text{AA} = \frac{7}{2}$
d)	$y\text{AA} = 2,7$	e)	$y\text{AA} = 8$	f)	$y\text{AA} = 5$

A74.

a)	$x = 3 \vee x = 5$	b)	$x = -1 \vee x = 7$	c)	$x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{5}$
d)	$x = 0,1 \vee x = 0,5$	e)	keine Lösung	f)	$x = 71$

A75.

a)	$SP(3/-7)$	b)	$SP(2/8)$
c)	$SP(-\frac{3}{10}/-\frac{149}{2}) = SP(-0,3/-7,45)$	d)	$SP(2/-4)$

A76.

a)	$f(x) = x^2 - 5x + 2$	b)	$f(x) = -2x^2 + 2x - 2$
c)	$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$	d)	$f(x) = 0,1x^2 + 0,2x + 0,3$

A77.

a)	$(-1/-9)$, $(2/3)$	b)	$(5/52)$, $(10/252)$
c)	$(3/13)$	d)	keine Schnittpunkte

A78. Angenommen die Tiefe der Fläche wird mit 't' bezeichnet. Dann ist die Breite: $10-2t$, da von den 10m Draht, die zur Verfügung stehen ja schon zweimal die Länge t für die Tiefe gebraucht wird. Die Fläche eines Rechtecks ist Breite mal Tiefe und somit ist eine 'Flächenformel' der Rechteckfläche:

$$A(t) = t \cdot (10 - 2t) = -2t^2 + 10t$$

Die zugehörige Parabel ist nach unten geöffnet, so dass es wirklich einen höchsten Punkt — eine größte Fläche gibt. diese wird durch den Scheitelpunkt der Funktion bestimmt.
Die Nullstellen der Funktion sind $t = 0$ und $t = 5$. Dazwischen liegt genau $t = 2,5$, was die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist.
Damit ist klar, dass die Rechteckfläche dann maximal wird, wenn ihre Tiefe 2,5m und ihre Breite 5m $(10 - 2 \cdot 2,5)$ ist.
Rechnet man nun noch $A(2,5)$ aus, dann hat man mit 12,5m^2 auch die maximal mögliche Fläche berechnet.

A79. Hier ist störend, dass man weder die Anzahl der Erwachsenen noch der Jugendlichen kennt und auch nicht deren Eintrittspreise. Man sollte daher zunächst mal mit zwei Variablen anfangen:

Die Anzahl der Erwachsenen soll 'e' genannt werden, die Anzahl der Jugendlichen ist dann $2400-e$, da es insgesamt 2400 Besucher waren.
Der Eintrittspreis für einen Erwachsenen soll den Namen 'p' bekommen, der für Jugendliche ist dann: $p-2$.
Mit diesem Ansatz erhält man zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} I & e\cdot p & = & 4500 \\ II & (2400-e)(p-2) & = & 900 \end{array}$$

Die erste Gleichung kann man nach 'e' auflösen: $e=\frac{4500}{p}$ und den entsprechenden Term dann in die zweite Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} (2400-\frac{4500}{p})(p-2) &= 900 \\ 2400p-4500-4800+\frac{9000}{p} &= 900 \quad \text{Mult. mit } p \\ 2400p^2-4500p-4800p+9000 &= 900p \\ 2400p^2-10200p+9000 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der p-q-Formel bekommt man leicht heraus, dass $p=3$ oder $p=\frac{5}{4}$ ist. Würde man von der zweiten Lösung noch 2€ subtrahieren, um den Preis für einen Jugendlichen heraus zu bekommen, dann würde sich ergeben, dass die Jugendlichen sogar noch Geld dafür bekommen, dass sie sich das Fussballspiel ansehen[1]. Es kann also nur so sein, dass jeder Erwachsene 3€ und jeder Jugendliche 1€ bezahlt.
Da $e=\frac{4500}{p}$ ist, waren offenbar 1500 Erwachsene als Zuschauer bei dem Spiel und damit dann 900 Jugendliche.

A80. Wenn man die Kantenlänge des Würfels 'k' nennt, dann gilt:

$$\begin{aligned} k^3-496 &= (k-1)(k-2)(k-3) \\ k^3-496 &= k^3-6k^2+11k-6 \\ 6k^2-11k-490 &= 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung kann man lösen und erhält als Lösungen: $k=10$ oder $k=-\frac{49}{6}=-8,1\overline{6}$. Da der Würfel keine negative Kantenlänge gehabt haben kann, muss er eine von 10 Zentimetern gehabt haben.

A81. Angenommen man nennt die Grundseite 'g'. Da für die Fläche eines Dreiecks gilt: $A=\frac{1}{2}g\cdot h$, gilt:

$$\begin{aligned} 18 &= \frac{1}{2}g(g+5) \\ 36 &= g^2+5g \\ 0 &= g^2+5g-36 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $g=-9$ und $g=4$. Da die Länge der Grundseite nicht negativ sein kann, beträgt ihre Länge 4cm.

A82. Wenn man die Windgeschwindigkeit mit 'w' bezeichnet, dann fliegt das Flugzeug auf dem Hinweg mit einer Geschwindigkeit von $100+w$km/h und beim Rückflug mit einer von $100-w$km/h. Da die Zeit gleich der Entfernung durch die Geschwindkigkeit ist, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{360}{100+w}+\frac{3}{2} &= \frac{360}{100-w} \quad \text{Mult. mi allen Nennern} \\ 72000-720w+30000-3w^2 &= 72000+720w \\ 0 &= 3w^2+1440w-30000 \end{aligned}$$

'item Diese Gleichung hat die Lösungen: $w=-500$ und $w=20$. Da Wind nicht 'rückwärst' wehen kann, ist die Windgeschwindigkeit 20km/h.

A83. Da der schnelle Fahrer in einer halben Stunde 4,5km mehr fährt als sein Konkurrent, ist seine Geschwindigkeit um 9km/h höher. Wenn man die Geschwindigkeit des ersten Fahrers 'v' nennt, dann ist die des zweiten Fahrers: '$v-9$'.

[1] Wäre das wirklich so, würde ich den Kassenwart auswechseln.

Die Rundenzeit des ersten Fahrers ist: $\frac{4,5}{v}$, die des zweiten Fahrers daher: $\frac{4,5}{v-9}$. Wenn man nun noch berücksichtigt, dass der erste Fahrer 5 Sekunden ($=\frac{5}{3600}$ Stunden) weniger pro Runde braucht, ergibt sich:

$$\frac{4,5}{v}+\frac{5}{3600}=\frac{4,5}{v-9}\quad \text{Mult. mit allen Nennern}$$

$$4,5\cdot 3600(v-9)+5v(v-9)=4,5\cdot 3600v$$

$$16200v-145800+5v^2-45v=16200v$$

$$5v^2-45v-145800=0$$

ese Gleichung hat die Lösungen: $v\approx -166$ und $v\approx 175$. Da nicht davon auszugehen ist, dass die Wagen rückwärts fahren, fährt der schnellere mit einer ungefähren Durchschnittsgeschwindigkeit von 175km/h.

A84. Zunächst einmal sollte man sich klar machen, dass jeder Wurf auf der Erdoberfläche entlang einer Parabel verläuft. Der Flug des Tennisballs aknn also mit einer Parabel beschrieben werden und daher gilt es als erstes die Gleichung dieser Parabel zu bestimmen.

Wählt man den linken Spielfeldrand als Ausgabspunkt eines Koordinatensystems, dann ist bekannt, dass der Ball beim x-Wert 5,485 (halbes Spielfeld minus 6,40m) eine Höhe von einem halben Meter hat.

Beim x-Wert von 11,885 (halbes Spielfeld) erreicht er in 2m Höhe seinen Scheitelpunkt.

Mit diesen Angaben kann die Gleichung der Parabel bestimmt werden.

Setzt man die Koordinaten des Scheitelpunkts in die Scheitelpunktform ein, erhält man:

$$f(x)=a(x-11,885)^2+2$$

In diese Gleichung kann nun der Punkt über der T-Linie eingesetzt werden und dann 'a' ausgerechnet werden:

$$0,5=a(5,485-11,885)^2+2$$

$$0,5=a\cdot(-6,4)^2+2$$

$$-1,5=40,96a$$

$$-0,0366\approx a$$

Die Funktionsgleichugn lautet demnach:

$$f(x)=-0,0366(x-11,885)^2+2$$

Berechnet man von dieser Funktion die Nullstellen, dann erhält man die Werte $x\approx 9,55$ und $x\approx 14,22$.

Interessant ist nur die 2. Nullstelle und die liegt eindeutig noch im Feld.

29.5 Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

A85.

a) Achsensymmetrisch zur y-Achse
b) Punktsymmetrisch zum Ursprung
c) Keine Symmetrie erkennbar
d) Achsensymmetrisch zur y-Achse
e) Keine Symmetrie erkennbar
f) Keine Symmetrie erkennbar

A86.

a) $f(x)\to\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to\infty$ für $x\to\infty$
b) $f(x)\to-\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to\infty$ für $x\to\infty$
c) $f(x)\to-\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to\infty$ für $x\to\infty$
d) $f(x)\to-\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to-\infty$ für $x\to\infty$
e) $f(x)\to\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to-\infty$ für $x\to\infty$
f) $f(x)\to-\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to\infty$ für $x\to\infty$

Kleiner Tipp zur letzten Teilaufgabe: Die höchste Potenz steht **nicht** am Anfang!

29.6 Aufgaben zu Exponentialfunktionen

A87.
$$f(x) = 800x + 250$$

A88.
$$f(x) = -200x + 2000$$

A89.
$$f(x) = 1000 \cdot 0,75^x$$

A90.
$$f(x) = 1000000 \cdot 1,2^x$$

29.7 Aufgaben zur Ableitung

A91. $f'(-1) = -2$

A92. Der zugehörige y-Wert ist: $f(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 - 2 = 19$, der erste Punkt also (2/10). Für den zweiten Punkt, x-Wert: $x = 3 + h$, gilt:

$$\begin{aligned} f(3+h) &= (3+h)^2 + 4(3+h) - 2 \\ &= 9 + 6h + h^2 + 12 + 4h - 2 \\ &= h^2 + 10h + 19 \end{aligned}$$

Und damit liegt dieser bei: $(3 + h/h^2 + 10h + 19)$. In die Steigungsformel eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} m &= \frac{h^2 + 10h + 19 - 19}{h} \\ &= \frac{h^2 + 10h}{h} \\ &= \frac{h(h+10)}{h} \\ &= h + 10 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass sich dieser Term dem Wert 10 nähert, wenn der Abstand h immer kleiner wird und sich der Null nähert. Damit ist: $f'(3) = 10$.

29.8 Aufgaben zu den Ableitungsregeln

A93.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f'(x) = 5x^4 & \text{b)} & f'(x) = 10x^9 \\ \text{c)} & f'(x) = 3x^2 + 2x & \text{d)} & f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1 \\ \text{e)} & f'(x) = 2x - 3 & \text{f)} & f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 7 \end{array}$$

A94.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x & \text{b)} & f'(x) = (2x-5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x \\ & = e^x(1+x) & & = e^x(x^2 + 7x + 2) \\ \text{c)} & f'(x) = \cos(x) + x \cdot \sin(x) & \text{d)} & f'(x) = (2x-5)\sin(x) + (x^2 - 5x + 3)\cos(x) \end{array}$$

A95.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & i(x) = 2x + 3 & \text{ä}(z) = \sqrt{z} \\ \text{b)} & i(x) = x^2 & \text{ä}(z) = \sin(z) \\ \text{c)} & i(x) = x^2 - 1 & \text{ä}(z) = e^z \\ \text{d)} & i(x) = \sin(x) & \text{ä}(z) = e^z \end{array}$$

A96.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \\ \text{b)} & f'(x) = 2x\cos(x^2) \\ \text{c)} & f'(x) = 2xe^{x^2-1} \\ \text{d)} & f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} \end{array}$$

29.9 Aufgaben zu Extrem- und Wendestellen

A97. Bei den ersten beiden Teilaufgaben kann die Extremstelle auch durch die Bestimmung des Scheitelpunktes bestimmt werden! Ansonsten gilt:

a) $HP(1/1)$
b) $TP(3/-1)$
c) $HP(0,42/0,38)$, $TP(1,58/-0,38)$ (gerundete Werte)
d) $HP(-0,31/24,63)$, $TP(4,31/-24,63)$ (gerundete Werte)
e) $HP(0,47/1,13)$, $TP(3,53/-13,13)$ (gerundete Werte)
f) $TP(-0,12/-4,06)$, $HP(2,79/9,21)$ (gerundete Werte)A
g) $TP(-1,58/-2,25)$, $HP(0/4)$, $TP(1,58/-2,25)$ (teilweise gerundete Werte)
f) $HP(-0,72/0,23)$, $TP(0/-0,04)$, $HP(0,72/0,23)$ (teilweise gerundete Werte)

A98.
a) $WP(2/0)$
b) $WP(1,67/0,74)$
c) $WP(2,67/0,74)$
d) $WP_1(-1,29/-4,87)$, $WP_2(1,29/-4,87)$

29.10 Aufgaben zu Integralen

A99.

a)	$F(x)=\frac{1}{3}x^3$	b)	$F(x)=\frac{1}{6}x^6$
c)	$F(x)=3\cdot\frac{1}{4}x^4=\frac{3}{4}x^4$	d)	$F(x)=3\cdot\frac{1}{-1}x^{-1}=-3x^{-1}$
e)	$F(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3$	f)	$F(x)=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{4}x^4$
g)	$F(x)=x^2+3x$	h)	$F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x$

A100. Alle Ergebnisse sind auf die zweite Nachkommastelle gerundet!

a)	$33,56$	b)	$1,95$
c)	$-6,28$	d)	$-0,17$

A101. Alle Ergebnisse sind auf die zweite Nachkommastelle gerundet!

a)	$1,46$	b)	$1,72$
c)	0	d)	$0,50$

A102.

a) Im Integrationsintervall liegt die Nullstelle $x=1$, daher müssen zwei Integrale berechnet werden.
$$A=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=1\text{ FE}$$

b) Im Integraltionsintervall liegen die Nullstellen $x=1$ und $x=5$. Daher müssen drei Integrale berechnet werden.
$$A=\frac{7}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{46}{3}=15,\overline{3}\text{ FE}$$

c) Hier liegt nur die Nullstelle $x=4$ im Integrationsintervall, es müssen also zwei Integrale berechnet werden.
$$A=\frac{28}{3}+\frac{103}{12}=\frac{215}{12}=17,91\overline{6}\text{ FE}$$

d) Hier liegt nur die $x=-2$ im Integrationsintervall
$$A=\frac{59}{12}+\frac{19}{12}=\frac{78}{12}=6,5\text{ FE}$$

A103.

a) Die Funktionsgraphen schneiden sich bei $x=2$ und $x=4$ und die eingeschlossene Fläche ist $A=\frac{4}{3}=1,\overline{3}$ FE.
b) Die Funktionsgraphen schneiden sich bei $x=-3$ und $x=1$. Die eingeschlossene Fläche ist $A=\frac{32}{3}=10,\overline{6}$ FE groß.
c) Die Funktionsgraphen schneiden sich bei $x=-4$ und $x=5$, woraus sich eine Fläche von $A=\frac{243}{2}=121,5$ FE ergibt.
d) Die Funktionsgraphen schneiden sich in **drei** Punkten bei $x=0$, $x=1$ und $x=2$. In Analogie zu dem, was im Abschnitt über Funktionsgraph und x-Achse gesagt wurde, müssen hier also zwei Integrale berechnet werden. Die Fläche ist $A=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=0,5$ FE groß.

29.11 Aufgaben zu den Oberstufenaufgaben

29.11.1 Steckbriefaufgaben

A104. Die Funktion muss die allgemeine Form:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f'(x) &= 2ax + b
\end{aligned}
$$

haben, da es sich um eine Parabel handelt (ganzrationale Funktion 2. Grades).
Aus den Angaben ergibt sich:

$$
\begin{array}{llcc}
I & 3 & = & a0^2 + b0 + c \\
II & 6 & = & a1^2 + b1 + c \\
III & 4 & = & 2a1 + b
\end{array}
$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $a = 1$, $b = 2$ und $c = 3$, woraus sich die Funktionsgleichung

$$f(x) = [1]x^2 + 2x + 3$$

ergibt.

A105. Die Punkte (0/0) und (1/0) liegen auf dem Funktionsgraphen und können sofort in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt werden. Weiterhin ist $f''(1) = 0$, denn bei $x = 1$ liegt ein Wendepunkt und $f'(1) = -1$, denn die Steigung der Tangente an diesen Wendepunkt ist -1.
Mit diesen vier Gleichungen ergibt sich:

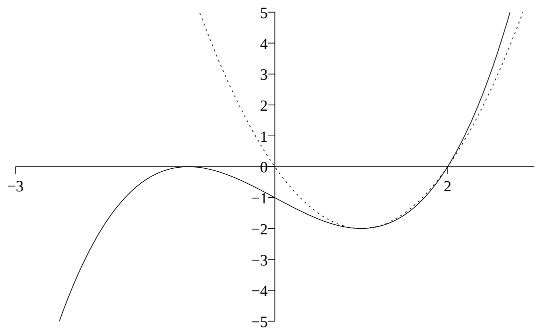
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

A106. Die Bedingungen ergeben, dass der Scheitelpunkt der Parabel ($S(1/-2)$) auf dem Funktionsgraphen liegen muss und dass die Funktion an dieser Stelle die Ableitung Null hat, da ja auch die Parabel im Scheitelpunkt eine waagerechte Tangente hat. Weiterhin ergeben sich noch die zwei Bedingungen, dass $f(0) = -1$ ist (der Graph geht durch den Wendepunkt) und $f''(0) = 0$ ist, denn er ist Wendepunkt.
Insgesamt ergibt sich:

$$
\begin{array}{llcl}
I & -2 & = & a + b + c + d \\
II & 0 & = & 3a + 2b + c \\
III & -1 & = & d \\
IV & 0 & = & 2b
\end{array}
$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -\frac{3}{2}$ und $d = -1$.
Die Funktionsgleichung ist also

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x - 1$$



A107. Offenbar handelt es sich um eine zum Ursprung punktsymmetrische ganzrationale Funktion 3. Grades. Ihre allgemeine Funktionsgleichung ist daher:

$$f(x) = ax^3 + cx$$

Zwei Bedingungen können aus dem Graph entnommen werden, etwa $f(1) = -1$ und $f'(1) = 0$.
Damit ergibt sich die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

A108. Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt immer in der Mitte zwischen den Nullstellen. Das ist hier nicht der Fall.

A109. Ganzrationale Funktionen 3. Grades haben höchstens ein relatives Maximum, dieses muss oberhalb des Wendepunktes (den die Funktionen immer haben) liegen!
Die vier Bedingungen wären:

$$\begin{array}{cccll} I & 2 & = & a+b+c+d & f(1)=2 \\ II & 0 & = & 3a+2b+c & f'(1)=0 \\ III & 3 & = & 8a+4b+2c+d & f(2)=3 \\ IV & 0 & = & 12a+2b & f''(2)=0 \end{array}$$

Dies ergibt sogar tatsächlich eine Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x + 4$$

aber diese Funktion hat bei $x = 1$ ein **Minimum**, was in der Bedingung gleich ist ($f'(1) = 0$)!

29.11.2 Aufgaben zu Extremwertaufgaben

A110. Das Volumen eines Quaders ist: Breite x Höhe x Länge. Die Höhe ist gleich der Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrats (in der Zeichnung mit 'x' bezeichnet). Die Breite ist gleich der ursprünglichen Breite (297mm) von der rechts und links jeweils ein 'x' abgeschnitten wurde, also: $297 - 2x$. Analog ergibt sich für die Länge: $210 - 2x$. Damit ist:

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (297 - 2x) \cdot (210 - 2x) \\ V'(x) &= 12x^2 - 2028x + 62370 \\ V''(x) &= 24x - 2028 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind $x \approx 40,42$ und $x \approx 128,58$. Der zweite Wert ist offenbar unsinnig, denn dann würden sich die Quadrate in der Länge des Blattes 'überlappen'. Damit muss nur der erste Wert überprüft werden, da aber $V''(40,42) \approx -1057,92$ und damit kleiner Null ist, liegt bei etwas mehr als 4 Zentimetern Seitenlänge des Quadrates das Maximum.
Die 'Randwerte' von 'x' sind $x = 0$ (selbsterklärend) und $x = 105$ (die halbe Länge). In beiden Fällen ergibt sich aber ein Volumen von Null, also ein kleinerer Wert als beim Maximum.

A111. Minimal soll die Oberfläche werden, die aus der Mantelfläche des Zylinders und **einer** Grundfläche besteht[2], also

$$O = r^2\pi + 2r\pi \cdot h$$

Wobei 'r' der Radius und 'h' die Höhe des Bechers ist. Da das Volumen bekannt ist, gilt weiter[3]:

$$200 = r^2\pi \cdot h \quad \text{oder} \quad h = \frac{200}{r^2\pi}$$

Setzt man die rechte Form der Volumengleichung in die Oberflächengleichung ein, erhält man eine Funktion der Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius:

$$\begin{aligned} O(r) &= r^2\pi + \frac{400}{r} = r^2\pi + 400r^{-1} \\ O'(r) &= 2r\pi - 400r^{-2} \\ O''(r) &= 2\pi + 800r^{-3} \end{aligned}$$

Die Ableitungsfunktion hat nur die Nullstelle $r \approx 3,99$ und dort ist die zweite Ableitung auch größer als Null, es liegt also ein Maximum vor.
Der Becher sollte also einen Durchmesser von ca. 8cm haben, woraus sich eine Höhe von ca. 3,99cm ergibt. Der Becher ist also halb so hoch wie sein Durchmesser.

A112. Wenn der eine Zummand 'x' ist, dann ist der andere $24 - x$, denn $x \quad + \quad 24 - x = 24$. Die Quadrate sind dann: 'x^2' und '$(24 - x)^2$' und mit der Summe dieser beiden Quadrate erhält man dann auch die 'Quadratsummenfunktion':

$$q(x) = x^2 + (24 - x)^2 = 2x^2 - 48x + 576$$

[2] Dadurch unterscheidet sich die Aufgabe von der ersten Beispielaufgabe.
[3] Das Volumen eines Zylinders ist Grundfläche x Höhe.

Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel, die beim Scheitelpunkt ihr Minimum hat. Die Scheitelpunktberechnung ergibt sofort, dass dieser beim x-Wert $x = 12$ liegt.

A113. Der Umfang des Fensters besteht aus einem Halbkreis mit Radius 'r', den beiden Höhen des Rechtecks (rechts und links), sowie der unteren Abschlusslinie, die doppelt so lang wie der Radius des Halbkreises ist, also

$$U = r\pi + 2h + 2r$$

Für die Fläche des Fensters gilt, dass sie sich aus einer Recheckfläche und einem Halbkreis zusammensetzt:

$$10000 = \frac{1}{2}r^2\pi + 2r \cdot h$$

Löst man die 'Flächenformel' nach 'h' auf und ersetzt dann dieses 'h' in der Umfangsformel durch seinen entsprechenden Term, ergibt sich für die 'Umfangsfunktion':

$$\begin{aligned} U(r) &= r(2 + \frac{1}{2}\pi) + 10000r^{-1} \\ U'(r) &= 2 + \frac{1}{2}\pi - 10000r^{-2} \\ U''(r) &= 20000r^{-3} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung hat die Nullstellen: $r \approx \pm 52,92$cm.
Da bei dem positiven Wert auch die zweite Ableitung größer als Null wird ($\Rightarrow$ Minimum), wird bei einer Breite von ca. 106cm der Umfang des Fensters minimal.

Keine Panik!

30 Lösungen zur Vektorrechung und analytischer Geometrie

30.1 Aufgaben zu Rechnen mit Vektoren

A114.

a) Die Vektoren sind gleich.

b) Die Vektoren sind ungleich.

c) Die Vektoren sind gleich.

d) Die Vektoren sind gleich.

e) Die Vektoren sind nicht gleich. Streng genommen kann man nicht mal diese Aussage treffen, weil die beiden angegebenen Vektoren eine unterschiedliche Dimension haben.

f) Auch diese Vektoren sind gleich. Beim ersten und zweiten Element kommt es nicht darauf an, wie die Zahl geschrieben wird und beim dritten Element kann man sogar sehen, dass in einem Vektor als Element auch ein Term stehen darf.
Man sollte sich daran erinnern, dass ein Term immer dann ein Term ist, wenn man ihn schließlich zu **einer** Zahl zusammen fassen kann.

A115.

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} & \text{c)} & \begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix} \\ \text{d)} & \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} & \text{e)} & \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} & \text{f)} & \begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix} \end{array}$$

A116.

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix}0\\10\\20\end{pmatrix} & \text{c)} & \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} \\ \text{d)} & \begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix} & \text{e)} & \begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix} & \text{f)} & \begin{pmatrix}-15\\-6\end{pmatrix} \end{array}$$

A117.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 5 & \text{b)} & 3 \\ \text{c)} & 0 & \text{d)} & -4 \end{array}$$

A118.

a) Sie sind linear abhängig.

b) Sie sind linear unabhängig.

c) Sie sind linear abhängig.

d) Sie sind linear unabhängig.

30.2 Aufgaben zu Punkt, Gerade, Ebene

A119.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \sqrt{5} \approx 2,24 & \text{b)} & \sqrt{17} \approx 4,12 \\ \text{c)} & 3 & \text{d)} & \sqrt{5} \approx 2,24 \end{array}$$

A120.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \approx 116,6^\circ & \text{b)} & \approx 98,1^\circ \\ \text{c)} & \approx 36,9^\circ & \text{d)} & \approx 46,7^\circ \end{array}$$

A121. Die angegebenen Lösungen **können** nur Beispiele sein. Vielfache der Lösungen sind natürlich auch richtig.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \\ \text{c)} & \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} & \text{d)} & \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

A122.

a) Der Punkt liegt auf der Geraden.

b) Der Punkt liegt nicht auf der Geraden.

A123.

A liegt in der Ebene.
B liegt nicht in er Ebene.
C liegt nicht in er Ebene.
D liegt in er Ebene.

A124.

a) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Weiterhin sind die Richtungsvektoren der Geraden Vielfache voneinander, also sind die Geraden **parallel**.

b) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die Geraden **windschief**.

c) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat unendlich viele Lösungen, daher sind die Geraden **identisch**.

d) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat die Lösungen $r = -3$ und $s = 2$. Daraus ergibt sich der Schnittpunkt $SP(2/1/2)$.

A125. Das sich ergebende Gleichungssystem hat die Form:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

und hat damit die Lösung: $r = \frac{2}{3}$, $t = -\frac{1}{3}$ und $s = -\frac{2}{3}$. Setzt man r in g ein, erhält man als Schnittpunkt: $SP(\frac{7}{3}/\frac{7}{3}/2)$

A126. Gesucht ist der Schnittpunkt, der Gerade, die vom Zielflughafen dem Richtungsvektor (ungekehrt) folgt mit der Flugebene. Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Somit ergeben sich die Lösungen: $r = 1$, $s = -5.5$ und $t = -4$. Setzt man t in die Geradengleichung ein, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dies ist der Ortsvektor zu dem Punkt, an dem der Landeanflug begonnen werden muss.

Keine Panik!

31 Lösungen zur Stochastik

31.1 Aufgaben zu den Grundlagen

A127.

a) Kein Zufallsexperiment, da die Einzelpreise bekannt sind und daher die Gesamtsumme berechnet werden kann.

b) Zufallsexperiment. Da man die Einzelpreise nicht kennt, ist auch die Gesamtsumme nicht bekannt.

c) Zufallsexperiment.

d) Kein Zufallsexperiment, da dieser Wert berechnet werden kann.

A128. Die Gesamtanzahl aller Kugeln in der Urne sind 9 Kugeln, wobei jede Kugel die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{9}$ hat gezogen zu werden. Da 3 rote Kugeln in der Urne liegen addieren sich deren Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Kugel gezogen wird zu $\frac{3}{9}$[1].

A129.

a) Nach der ersten Ziehung befinden sich noch neun Kugeln in der Urne, da die erste Kugel nicht wieder zurück gelegt wird. Eine dieser neuen Kugeln hat die Aufschrift '2', da bei der ersten Ziehung keine '2' gezogen wurde. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$.

b) Auch nun befinden sich vor der zweiten Ziehung noch neun Kugeln in der Urne. Keine davon trägt die Aufschrift '2', da diese schon bei der ersten Ziehung gezogen wurde. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{0}{9}$ oder einfach 0.

c) Da sich auch wieder alle zehn Kugeln vor der zweiten Ziehung wieder in der Urne befinden, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$.

d) Hier ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine '2' unter den beiden Kugeln befindet $\frac{1}{10}$, weil vor der Ziehung jede Kugel die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10}$ hatte mit in die Gruppe er gezogenene Kugeln zu gelangen.

A130.

a) $A = \{'a',' e'\}$, $p(A) = \frac{2}{5}$

b) $B = \{'a',' b',' d',' e'\}$, $p(B) = \frac{4}{5}$

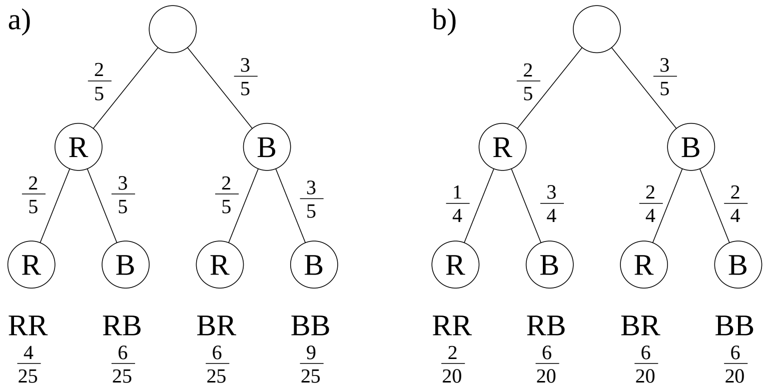
c) $\overline{A} = \{'b',' c',' d'\}$, $p(\overline{A} = \frac{3}{5}$

d) $A \cup B = \{'a',' b',' d',' e'\}$. Hier liegt der Sonderfall vor, dass $A \cup B = B$ ist, was durchaus vorkommen kann. Die Wahrscheinlichkeit ist dann $p(A \cup B) = p(B) = \frac{4}{5}$.

e) $A \cap B = \{'a',' e'\}[= A]$ und $p(A \cap B) = \frac{2}{5}$

[1] Ich erinnere daran: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung sollten Brüche in der Regel nicht gekürzt werden.

A131.



c) Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man die Kugel der ersten Ziehung nicht wieder in die Urne legt.
Für ein späteres Thema (bedingte Wahrscheinlichkeit) ist es auch schon mal sinnvoll darauf hinzuweisen, dass die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten im Fall b) im linken Teilbaum eine andere ist, als im rechten Teilbaum. Im Fall a) sind die Wahrscheinlichkeiten in beiden Teilbäumen gleich.

d) $p_a(RB) = \frac{6}{25}$ und $p_b(RB) = \frac{6}{20}$

e) Das einzige Ergebnis, das keine blaue Kugel enth—”alt ist das Ergebnis RR.
Damit gilt: $p_a(RR) = \frac{4}{25}$ und $p_b(RR) = \frac{2}{20}$

f) Im ersten Fall gilt:

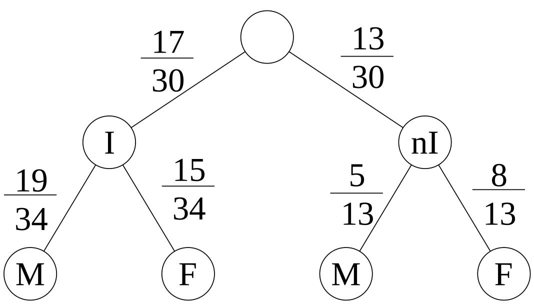
$$\begin{aligned} p(\text{unterschiedlich}) &= p(RB) + p(BR) \\ &= \frac{6}{25} + \frac{6}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Im zweiten Fall gilt:

$$\begin{aligned} p(\text{unterschiedlich}) &= p(RB) + p(BR) \\ &= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} \\ &= \frac{12}{20} \end{aligned}$$

A132. Die Wahrscheinlichkeit im ersten Wurf eine ’Sechs’ zu würfeln beträgt $\frac{1}{6}$. Im zweiten Wurf sind es $\frac{5}{36}$ (Multipliziere die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade!) und im dritten sind es $\frac{25}{216}$. Zusammen ergibt das die schon bekannten $\frac{91}{216}$.

A133. Um die Sache ein *bisschen* spannender zu machen, habe ich die Wahrscheinlichkeiten in gekürzter Form angegeben.



A134. Weil es bei Aufgabe d) acht Zahlen sind, muss zur Berechnung des Medians der Mittelwert der beiden mittleren Zahl berechnet werden. Bei Aufgabe c) ist das nicht nötig, weil die beiden mittleren Zahlen gleich sind.

a)	$\overline{x} = 3,43$, Median: 3	b)	$\overline{x} = 30,88$, Median: 32
c)	$\overline{x} = 3,25$, Median: 3	d)	$\overline{x} = 37,25$, Median: 38,5

A135. Es ist $\overline{x} = 3,2$ und $s \approx 1,28$.

A136. Beide Schützen haben durchschnittlich 7,1 Punkte pro Schuss erreicht, da aber die empirische Standardabweichung von Schützen A $s = 0,7$ ist und die des Schützen B $s \approx 1,45$ beträgt, würde ich Schützen A in den Wettkampf schicken, weil er weniger Abweichungen bei seinen Schüssen hatte, also sicherer ist[2].

A137. Die Zufallswerte sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, -0,1. Die ersten Werte haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$, während die '-0,1' die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ hat. Damit ist:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} - 0,1 \cdot \frac{5}{6} \\ &= 15 \cdot \frac{1}{6} - 0,1 \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{29}{12} = 2,41\overline{6}\end{aligned}$$

Durchschnittlich wird man also pro Spiel 2,42 € ausgezahlt bekommen.

A138. Es ist

$$\begin{aligned}\mu = 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \approx 0,67\end{aligned}$$

Da man durchschnittlich nur 67 Cent gewinnt, aber bei jedem Spiel einen Euro ausgeben muss, ist das Spiel nicht fair.

A139. Der Erwartungswert der Auszahlung ist: $\mu = \frac{6}{5}$. Die SV muss also 1,20 € verlangen, wenn das Spiel fair sein soll.

A140. Damit das Spiel fair wird, muss der Erwartungswert Eins betragen:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot x + \frac{7}{16} \cdot 0 \\ 1 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot x \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{16} \cdot x \\ 8 &= x\end{aligned}$$

Der Auszahlungsbetrag muss also 8 € betragen, wenn das Spiel fair sein soll.

A141.

a) $n = 20$, $k = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $p(X = 3) = 0,001087\ldots$

b) $n = 10$, $k = 4$, $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ $p(X = 4) = 0,023\ldots$

c) $n = 10$, $k = 2$, $p = 0,05$, $p(X = 2) = 0,075$

[2] In privaten Sportvereinen werden sicherlich auch noch Kriterien wie Dauer der Vereinszugehörigkeit oder Sympathie eine Rolle spielen, aber zum Beispiel bei der Auswahl eines Olympia-Kaders wird tatsächlich so vorgegangen.

Index