Quadratische Gleichungen

Alle quadratischen Gleichungen haben die Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

oder sie lassen sich in diese Form bringen. Dabei stehen a, b und c für beliebige Zahlen. Beispiele für quadratischen Gleichungen sind:

$$\begin{array}{rllll}
2x^2 + 3x - 7 = 0 & a = 2 & b = 3 & c = -7 \\
\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{17} = 0 & a = \frac{1}{2} & b = -\frac{2}{5} & c = \frac{1}{17} \\
-\sqrt{3}x^2 + \sqrt{13}x + \sqrt{2} = 0 & a = -\sqrt{3} & b = \sqrt{13} & c = \sqrt{2} \\
x^2 - 3 = 0 & a = 1 & b = 0 & c = -3 \\
-x^2 + 2x = 0 & a = -1 & b = 2 & c = 0
\end{array}$$

Da auf der einen Seite der Gleichung immer eine Null steht, läßt sich jede quadratische Gleichung auf die Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

bringen. Dabei ist dann $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Man teilt also die Gleichung einfach durch den Faktor von x^2, also durch a. Diese Form heißt **Normalform**.
Bevor man irgendeine quadratische Gleichung lösen kann, **muß** die auf die Normalform gebracht werden. Hierzu ein paar Beispiele:

$$\begin{array}{rcr}
2x^2 + 3x - 7 = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = 0 \\
\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{17} = 0 & \Leftrightarrow & x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{2}{17} = 0 \\
-x^2 + 2x = 0 & \Leftrightarrow & x^2 - 2x = 0
\end{array}$$

Wenn man die Gleichung in Normalform gebracht hat, dann gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen. Per **Formel** oder per **quadratischer Ergänzung**. Ich persönlich ziehe die zweite Methode vor, da sie weniger fehleranfällig ist.
Beide Methoden führen aber immer zum gleichen Ergebnis (wenn sie richtig angewendet werden), also zu einer, zwei oder keiner Lösung.

Lösung mit Formel

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Das bedeutet, daß die Zahlen $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ **und** $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösung der Gleichung sind.
Wenn der Ausdruck unter der Wurzel gleich Null ist, dann hat die Gleichung nur die eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$.
Ist der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null, dann hat die Gleichung keine Lösung.
Beispiele:

- Bei der Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ sind $p = 4$ und $q = -5$. Somit sind die Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - (-5)}$. Zusammengefaßt ergibt das $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9}$, also $x = -2 + 3$ und $x = -2 - 3$ und damit sind die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = -5$.

- Bei der Gleichung $x^2 - 12x + 36 = 0$ sind $p = -12$, $q = 36$. Die Lösungsformel liefert: $x_{1,2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\frac{12^2}{4} - 36}$. Das ergibt zusammengefaßt $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{0}$. Damit hat die Gleichung nur die Lösung $x = 6$.
- Bei der Gleichung x^2+4x+8 sind $p = 4$ und $q = 8$. Somit ist $x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - 8}$, was $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-4}$ ergibt. Somit hat diese Gleichung keine Lösung.

Bei der Lösung mit der Lösungsformel ist darauf zu achten, daß du die Werte für p und q richtig einsetzt. Das gilt vor allem dann, wenn einer oder beide der Werte negativ sind, oder wenn einer der beiden Werte gleich Null ist. Auch in diesem Fall müssen die Werte richtig in die Formel eingesetzt werden.

Lösung mit quadratischer Ergänzung

Die Lösung mit der quadratischen Ergänzung basiert auf den binomischen Formeln. Diese Formeln sind nichts geheimnisvolles, sondern eigentlich nur eine Abkürzung für die Multiplikation zweier Klammern mit gleichem Inhalt (Abgesehen von der dritten binomischen Formel). Sie ergeben sich durch:

$$\begin{array}{rcccccc} (a+b)(a+b) & = & a(a+b)+b(a+b) & = & a^2+ab+ab+b^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)(a-b) & = & a(a-b)-b(a-b) & = & a^2-ab-ab+b^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) & = & a(a-b)+b(a-b) & = & a^2-ab+ab-b^2 & = & a^2-b^2 \end{array}$$

Wenn nun eine Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung gelöst werden soll, dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Zahl, die ganz ohne x da steht (oben q genannt) ist gleich Null. Gleichungen, die diese Form haben, sehen z.B. folgendermaßen aus:
   $x^2 - 2x = 0$
   $x^2 + \sqrt{17}x = 0$
   $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$
2. Der Faktor, der bei x steht ist gleich Null (oben p genannt). Gleichungen dieser Form sehen folgendermaßen aus:
   $x^2 - 4 = 0$
   $x^2 + \sqrt{3} = 0$
   $x^2 - \frac{1}{17} = 0$
3. Beide oben genannten Zahlen sind nicht Null. Die Gleichung sieht dann also wie eine '*richtige*' quadratische Gleichung aus:
   $x^2 - 3x + 4 = 0$
   $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{1}{7} = 0$
   $x^2 + \frac{2}{5}x - \sqrt{13} = 0$

Für jede dieser Möglichkeiten muß eine andere Lösungsstrategie genutt werden. Diese sollen im Einzelnen nun vorgestellt werden:

Der Fall $q = 0$

Dies ist der einfachste Fall, da in dieser Situation immer ein x ausgeklammert werden kann und die Lösung immer aus zwei Lösungen besteht. Da das Lösungsverfahren in diesem Fall so einfach ist, nur ein paar Beispiele:

- Die Gleichung $x^2 - 4x = 0$ läßt sich vereinfachen zu: $x(x - 4) = 0$ und damit ist $x = 0$ oder $x - 4 = 0$, was $x = 0$ und $x = 4$ ergibt. Das sind die beiden Lösungen der Gleichung.
- Die Gleichung $x^2+\sqrt{2}x = 0$ wird zu $x(x+\sqrt{2}) = 0$ und damit ist $x = 0$ und $x+\sqrt{2} = 0$ und die Lösungen sind: $x = 0$ und $x = -\sqrt{2}$
- Die Gleichung $x^2 - \frac{1}{7}x = 0$ ergibt $x(x - \frac{1}{7}) = 0$, oder $x = 0$ und $x - \frac{1}{7} = 0$ und hat somit die Lösungen $x = 0$ und $x = \frac{1}{7}$.

Der Fall $p = 0$

Dieser Fall ist schon ein wenig komplizierter. Zum einen kann es sein, daß dieser Fall keine Loesungen hat, zum anderen spielt dieser Fall auch im dritten Fall eine Rolle.

Eine Gleichung diesen Typs ist nur dann lösbar, wenn zwischen dem x^2 und dem q ein **Minuszeichen** steht. Steht dort ein Pluszeichen, dann hat die Gleichung keine Lösung. Wenn ein Minuszeichen dort steht, dann kann die Gleichung mit der dritten binomischen Formel gelöst werden, indem man die Zahl q als Quadrat einer anderen Zahl (im Zweifelsfalle der Wurzel) schreibt und dann die dritte binomische Formel '*von rechts nach links*' anwendet. Auch für diesen Fall nun ein paar Beispiele:

- Die Gleichung $x^2 + \sqrt{2} = 0$ hat keine Lösung (Der quadratische Term ist '*irreduzibel*').
- Die Gleichung $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ läßt sich umformen zu $x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0$ und dann mit der dritten binomischen Formel zu $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) = 0$. Damit ist $x - \frac{2}{3} = 0$ oder $x + \frac{2}{3} = 0$ und die Lösungen sind dann $x = \frac{2}{3}$ oder $x = -\frac{2}{3}$.
- Die Gleichung $x^2 - 3 = 0$ läßt sich nach obiger Methode vereinfachen zu $x^2 - \sqrt{3}^2 = 0$ und dann zu $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Somit ist $x = \sqrt{3} = 0$ oder $x + \sqrt{3} = 0$ und die Lösungen sind dann $x = \sqrt{3}$ und $x = -\sqrt{3}$.

Der Fall in dem beide Zahlen nicht Null sind

Dies ist immer der komplizierteste Fall. In jedem Fall muß die Gleichung zuerst mit der ersten oder zweiten binomischen Formel in die Form $(x \pm s)^2 \pm t$ gebracht werden, wobei s und t wieder Zahlen sind, die sich durch die Umformung ergeben.
Wodurch entscheidet sich nun, ob die Umformung nach der ersten oder zweiten binomischen Formel erfolgen muß und wie funktioniert die Umformung.
Die erste binomische Formel nimmt man, wenn hinter dem x^2 ein Pluszeichen steht. Steht dagegen ein Minuszeichen dahinter, dann wird die zweite binomische Formel verwendet.
In jedem Fall müssen die beiden ersten 'Glieder' der Gleichung zu einem vollständigen Binom umgeformt werden. Dazu wird zu dem x^2-Teil und zu dem px-Teil das Quadrat der Hälfte von p addiert und sofort wieder subtrahiert, bevor dann das q kommt.
In der Gleichung $x^2 - 8x + 7 = 0$ wird also das $x^2 - 8x$ zu $x^2 - 8x + 4^2$ ergänzt und somit ergibt sich die Gleichung insgesamt zu: $x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 7$. Die ersten drei 'Glieder' der Gleichung ergeben dann immer ein vollständiges Binom, das dann zusammengefaßt werden kann. Vollständig sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 &= x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 16 + 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 9 \end{aligned}$$

Der Teil $x^2 - 8x + 16$ ist nun ein vollständiges Binom und kann zu $(x-4)^2$ zusammengefaßt werden. Damit sieht die Gleichung dann vollkommen, wie im Fall 2 aus, mit dem einzigen Unterschied, daß nun zu Beginn eine Klammer zum Quadrat steht und nicht nur ein x^2. Somit muß dann die Zahl, die am Ende des Ausdrucks steht wieder in eine Quadratzahl umgewandelt werden und dann die dritte binomische Formel 'von rechts nach links' angewendet werden.
Ein vollständiges Beispiel sähe dann folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + 12 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 12 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + 16 - 16 + 12 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)^2 - 16 + 12 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)^2 - 4 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)^2 - 2^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4+2)(x-4-2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)(x-6) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x - 2 = 0 & \vee & x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 2 & \vee & x = 6 \end{array}$$

Übungsaufgaben

A1.

a)	$x^2-3x=0$	b)	$x^2+2x=0$	c)	$x^2-\frac{1}{2}x=0$
d)	$x^2=2x$	e)	$3x^2=7x$	f)	$3x-2x^2=0$

A2.

a)	$x^2-4=0$	b)	$x^2-3=0$	c)	$x^2-\frac{4}{9}=0$
d)	$2x^2=32$	e)	$27-3x^2=0$	f)	$\frac{x^2}{2}=12,5$

A3.

a)	$(2x+7)^2=169$	b)	$(3x+4)^2=121$	c)	$(9x-4)^2=(7x-2)^2$
d)	$x^2+8x+16=25$	e)	$9x^2+30x+25=25$	f)	$x^2-7x=-6$
g)	$x^2-4x-1=0$	h)	$x^2-14x=-33$	i)	$x^2-17x-60=0$
j)	$x^2+6x=13$	k)	$x^2-8x=-16$	l)	$x^2-3x=10$
m)	$x^2-56=-x$	n)	$x^2+14-9x=0$	o)	$x^2-6x-7=0$
p)	$x^2+2ax=b^2-a^2$	q)	$3x^2-25x+8=0$	r)	$2x^2-11x-6=0$
s)	$5x^2=11x-2$	t)	$-3x^2+33x=90$	u)	$-7x^2-81x=44$
v)	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}-11=0$	w)	$3(10-x)\cdot(2x-15)=x$	x)	$(x+1)^2+(x-1)^2=7x+4$

A4.

a)	$x^2=-3$	b)	$(x-2)^2+1=0$	c)	$x^2+6x+10=0$
d)	$2x^2-8x+11=0$	e)	$(x-1)\cdot(x+1)=-2$	f)	$(x+2)\cdot(x-3)+7=0$

A5. Beiden folgenden Aufgaben ergeben sich quadratische Terme, wenn man die Gleichung zunächst mit dem **Hauptnenner** multipliziert. Zur Ermittlung des Hauptnenners müssen zuerst **alle** vorkommenden Nenner faktorisiert werden und dann kann der Hauptnenner bestimmt werden. Wegen der Komplexität der Arbeit, zuerst ein Beispiel:

Die Gleichung

$$\frac{6x+8}{8x+14}-\frac{2x+3}{16x^2-49}=\frac{6}{5}-\frac{4x-6}{8x-14}$$

hat die Nenner $8x+14, 16x^2-49, 5, 8x-14$. Von diesen ist alleine der Nenner $16x^2-49$ weiter faktorisierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} 16x^2-49 &= (4x)^2-7^2 \\ &= (4x+7)(4x-7) \end{aligned}$$

Somit hat die Gleichung die Nennerfaktoren: $8x+14, 8x-14, 4x+7, 4x-7, 5$. Bei den ersten beiden Termen läßt sich noch eine 2 ausklammern, so daß die Nennerfaktoren nur noch $4x+7, 4x-7, 5, 2$ sind. Das Produkt dieser Faktoren ist der Hauptnenner, also $160x^2-490$. Wird die Gleichung mit diesem Nenner multipliziert, dann ergibt sich (nach dem Kürzen):

$$\begin{aligned} & (6x+8)(4x-7)5-10(2x+3) &=& \; 6\cdot 2(4x+7)(4x-7)-(4x-6)(4x+7)5 \\ \Leftrightarrow\; & 120x^2-50x-280-20x-30 &=& \; 192x^2-588-80x^2-20x+210 \\ \Leftrightarrow\; & 120x^2-70x-310 &=& \; 112x^2-20x-378 \end{aligned}$$

Dies ist dann eine normale quadratische Gleichung mit den Lösungen $x=\frac{17}{4}\vee x=2$.

a)	$\frac{2}{x}-2x=3$	b)	$12x-\frac{42-3x}{x+1}=42$	c)	$x+1=\frac{2}{x}$
d)	$\frac{1}{2}+\frac{14}{x^2}=\frac{11}{2x}$	e)	$\frac{16-x}{2}-\frac{4(x-11)}{x-6}=\frac{x-4}{6}$	f)	$\frac{10x-6}{12x-4}+\frac{9x-7}{3+9x}=\frac{11}{12}+\frac{26x+2}{18x^2-2}$

Lösungen

Achtung, die Lösungen *können* falsch sein

A1.

a)	$x = 0 \vee x = 3$	b)	$x = 0 \vee x = -2$	c)	$x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$
d)	$x = 0 \vee x = 2$	e)	$x = 0 \vee x = \frac{7}{3}$	f)	$x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$

A2.

a)	$x = 2 \vee x = -2$	b)	$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$	c)	$x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{2}{3}$
d)	$x = 4 \vee x = -4$	e)	$x = 3 \vee x = -3$	f)	$x = 5 \vee x = -5$

A3.

a)	$x = 3 \vee x = -10$	b)	$x = 5 \vee x = \frac{7}{3}$	c)	$x = 1 \vee x = \frac{3}{8}$
d)	$x = 1 \vee x = -9$	e)	$x = 0 \vee x = -\frac{10}{3}$	f)	$x = 1 \vee x = 6$
g)	$x = 2 \pm \sqrt{5}$	h)	$x = 3 \vee x = 11$	i)	$x = 20 \vee x = -3$
j)	$x = -3 \pm \sqrt{22}$	k)	$x = 4$	l)	$x = -2 \vee x = 5$
m)	$x = 7 \vee x = -8$	n)	$x = 2 \vee x = 7$	o)	$x = -1 \vee x = 7$
p)	$x = b - a \vee x = -b - a$	q)	$x = 9 \vee x = \frac{1}{3}$	r)	$x = 6 \vee x = -\frac{1}{2}$
s)	$x = 2 \vee x = \frac{1}{5}$	t)	$x = 5 \vee x = 6$	u)	$x = -11 \vee x = -\frac{4}{7}$
v)	$x = 6 \vee x = -\frac{22}{3}$	w)	$x = 9 \vee x = \frac{25}{3}$	x)	$x = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{4}$

A4. Alle Gleichungen dieser Aufgabe sind unlösbar, da die entsprechenden quadratischen Terme irreduzibel sind.

A5.

a)	$x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$	b)	$x = 4 \vee x = -\frac{7}{4}$	c)	$x = 1 \vee x = -2$
d)	$x = 4 \vee x = 7$	e)	$x = 21 \vee x = 4$	f)	$x = 3 \vee x = \frac{1}{33}$