Terme

Allgemeines

Definition: Eine **Variable** ist ein Platzhalter für eine Zahl. In der Regel verwendet man für Variablen Kleinbuchstaben, z.B.: 'x', 'y', 'a', ...

Definition: Ein **Term** ist eine *sinnvolle* Kombination von Zahlen, Variablen und Rechenzeichen. Es müssen nicht in jedem Term Zahlen, Variablen oder Rechenzeichen vorkommen.
'Sinnvoll' meint folgendes: Wenn man alle Variablen eines Terms durch eine Zahl ersetzt, dann ergibt sich ein Ausdruck, der berechenbar ist.
Beispiele:

$2+a$	Term
$\frac{2-x}{3-y}$	Term
$2\cdot x+5\cdot y$	Term
$2-x+($	Kein Term, wegen der öffnenden Klammer
$\frac{3}{a-a}$	Kein Term, da sich eine Division durch Null ergibt
$\frac{a-a}{3}$	Term (der immer den Wert Null hat s.u.)
x	Term (ohne Zahl und ohne Rechenzeichen)
4	Term (ein sogenannter Zahlterm)

Schreibweise: Bei Termen ist es üblich den Multiplikationspunkt weg zu lassen, wenn keine Mehrdeutigkeiten entstehen können. Üblicherweise wird der Multiplikationspunkt nur zwischen Zahlen geschrieben, aber nicht zwischen Variablen, zwischen Variablen und Zahlen, zwischen Zahlen oder Variablen und Klammern.
Beispiele:

$2a$	statt	$2\cdot a$
xy	statt	$x\cdot y$
$2(x+a)$	statt	$2\cdot(x+a)$

Definition: Ersetzt man in einem Term alle Variablen durch Zahlen, dann ergibt sich ein berechenbarer Wert. Dieser Wert heißt **Wert des Terms**.
Beispiele:
Gegeben ist der Term: $2x-1$. Für den Variablenwert $x=1$ ergibt sich der Wert des Terms: $2\cdot 1-1=1$. Der Wert des Terms für den Variablenwert 1 ist also 1.
Für den Variablenwert 5 ergibt sich der Wert des Terms $2\cdot 5-1=9$.
In der Regel ergibt sich also für jeden Variablenwert ein anderer Wert des Terms. Enthält ein Term mehr als eine Variable, dann müssen auch entsprechend viele Variablenwerte angegeben werden. Es gilt aber: **Gleicher Variablenbuchstabe steht für gleichen Variablenwert**.
Wenn z.B. der Term lautet: $a(a+b)$, dann braucht nur ein Variablenwert für a und einer für b angegeben werden. Der Wert für a wird in beide a's eingesetzt. Der Termwert für die Variablenwerte $a=2$, $b=5$ ist dann z.B.: $2(2+5)=14$.
Aufgaben:

A1. Gegeben ist der Term: $2x+1$. Berechne die Werte des Terms für x=1, 2, -4, 10, 20.

A2. Gegeben ist der Term: $a(a+1)$. Berechne die Termwerte für a=-1, -2, 1, 5, 10.

A3. Gegeben ist der Term: $x(x-y)$. Berechne die Termwerte für die Wertepaare (Der x-Wert ist immer der erste, der y-Wert der zweite): (1/1), (1/0), (2/4), (-2/-3), (5/-10).

A4. Gegeben ist die folgende Tabelle mit Variablen- und Termwert. Welcher Term könnte sich dahinter verstecken?

x	1	2	3	4	5
Term	3	5	7	9	11

A5. Verfahre wie in der letzten Aufgabe

x	1	2	3	4	5
Term	2	6	12	20	30

A6. Verfahre wie in der letzten Aufgabe

x	1	2	3	4	5
Term	0	3	8	15	24

Klassifikation von Termen

Speziell für den Umgang mit Termen in Gleichungen ist es sinnvoll Terme zu klassifizieren. Dazu dient die jeweils letzte Rechnung, die man ausführen muss, wenn man den Wert eines Terms berechnen will. Dabei gelten die üblichen Rechenregeln, also insbesondere die Klammerregeln und die Regel: Punkt- vor Strichrechnung.
Für die Grundrechenarten unterscheidet man dabei: Additions- oder Summenterm (manchmal auch nur einfach: Summe), Subtraktions- oder Differenzterm, Multiplikations- oder Produktterm und Divisions-, Quotienten- oder Bruchterm.
Enthält ein Term keine Rechnung, dann ist es entweder ein Zahlterm (er besteht dann einfach nur aus einer Zahl) oder ein Variablenterm, der nur aus einer Variablen besteht.
Beispiele:
Bei dem Term $a(a+1)$ ist dabei z.B. ein Produktterm, denn wenn man die Variable a durch eine Zahl ersetzt und dann den Wert des Terms berechnen will, dann muss zuerst die Addition durchgeführt werden und dann erst die Multiplikation. Die Multiplikation ist also die letzte Rechnung.
Der Term $2x + 3y$ ist ein Additionsterm, denn hier müssen wegen der Regel: Punkt- vor Strichrechnung, zuerst die beiden Produkte berechnet werden und dann, als letztes die beiden Ergebnisse addiert werden.
Der Term $\frac{x+1}{2}$ ist ein Divisionsterm. Hier wird erst die Summe berechnet und dann das Ergebnis durch 2 geteilt.
Aufgaben:

A7. Klassifiziere die folgenden Terme:

a)	$(x+2)-(x-3)$	b)	$(x-1)(x+2)$	c)	$\frac{1}{a+1}$
d)	2	e)	$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$	f)	x^2
g)	$(b+2)\div(b-2)$	h)	x	i)	$2\frac{x-4}{x^2+1}$

Bemerkung:
Die Klassifikation gilt auch für höhere Rechenarten. Analog ergeben sich dann Wurzelterme, Logarithmenterme, Potenzterme, ...

Gleichwertige Terme

Gegeben sind der Term $x + 2(x + 1) - 1$ und der Term $3x + 1$. Berechnet man für die x-Werte -2, 1, 3, 5, 10 die Termwerte, ergibt sich:

x	-2	1	3	5	10
Term_1	-5	2	10	16	31
Term_2	-5	2	10	16	31

Auch wenn man andere Variablenwerte auswählt, ergibt sich immer der gleiche Termwert bei den beiden Termen. Die beden Terme sind gleichwertig.
Definition: Zwei Terme heißen **gleichwertig**, wenn sich bei gleichen Variablen immer der gleiche Wert des Terms ergibt.

Termumformungen

Ziel der Termumformungen ist es aus einem (komplizierten) Term einen einfacheren zu machen, der zu dem ersten gleichwertig ist.
Da Variablen (das einzig echte Neue) Platzhalter für Zahlen sind, gelten für sie die gleichen Rechengesetze, wie für Zahlen:
Kommutativgesetz

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

Die Reihenfolge bei der Addition und Multiplikation beeinflusst das Ergebnis nicht.
Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c, \quad (ab)c = a(bc) = abc$$

Werden mehr als zwei Zahlen/Variablen addiert oder multipliziert, beeinflusst die Art der Zusammenfassung das Ergebnis nicht.
Distributivgesetz

$$a(b+c) = ab + ac$$

Wir eine Klammer mit einer Zahl oder einer Variablen multipliziert, wird jeder Term in der Klammer mit der Zahl oder der Variablen multipliziert.
Diese drei Gesetze reichen prinzipiell aus. Es ist aber sinnvoll manche von ihnen zu Regeln zusammen zu fassen, um sie 'brauchbarer' zu machen. Diese Regeln sollen nun vorgestellt werden.

Schreibweise für Produkte

Kommen in einem Produkt mehrere Zahlen und Variablen vor, dann sollten sie, nach dem Kommutativgesetz für dei Multiplikation in folgende Reihenfolge gebracht werden:
Zuerst die Zahl, dann die Variablen in alphabetischer Reihenfolge; zum Beispiel:

$2ab$	statt	$b2a$
$12xyz$	statt	$z12yx$
$5rst$	statt	$st5r$

Mathematisch gesehen besteht zwar kein Unterschied zwischen den Termen, aber für die tägliche Arbeit hat sich diese Schreibweise bewährt, weil man gleiche Variablen leichter erkennen kann (Siehe nächsten Abschnitt).

Zusammenfassen gleicher Variablen

Gleiche Variablen können zusammengefasst werden. Das lässt sich am einfachsten an einem Beispiel erklären:

$$\begin{aligned} 5a + 2a &= a(5+2) && \text{Nach dem Distributivgesetz} \\ &= a \cdot 7 && \text{Einfache Zahlenrechnung} \\ &= 7a && \text{Nach dem Kommutativgesetz} \end{aligned}$$

Man kann sich diesen Zusammenhang auch leichter klar machen, wenn man sich die Variablenbuchstaben '*sprechend*' denkt. Ersetzt man z.B. in dem obigen Beispiel die Variable a durch Apfel oder Äpfel, dann ergibt sich sofort:
5 Äpfel plus 2 Äpfel gleich 7 Äpfel.
Beispiele:

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 5x \\ 2a + 4a + 5a &= 11a \\ 3x - 5x + 8x &= 6x \\ 3ab + 2a &= \text{ Lässt sich nach dieser Regel nicht vereinfachen, da} ab \neq a \\ 2a + 3b + a - b &= 3a + 2b \end{aligned}$$

Bemerkungen zu den Beispielen: Steht eine Variable alleine, ohne Zahl da, dann kommt sie immer **einmal** vor ($a = 1a$, $x = 1x$).
Beim letzten Beispiel wurde erst das Kommutativgesetz angewendet, um die a's und die b's zusammen zu bringen.
Aufgaben:

A8. Vereinfache die folgenden Terme

a)	$s+s+s$	b)	$t+t-t+t-t$	c)	$a+2a+a$
d)	$x+2x-x$	e)	$2a+5a-3a+6a$	f)	$4r+8r-3r+12r$
g)	$2a+3b-a+2b$	h)	$5x-2y-2x+3y$	i)	$12x-3y+2y-5x+3y+12x$

Addieren und Subtrahieren von Klammern

Addieren von Klammern

Regel:

Wenn eine Klammer addiert wird, dann kann die Klammer und das Pluszeichen vor der Klammer weggelassen werden. Hat der erste Term in der Klammer kein ausgeschriebenes Vorzeichen, dann ist er positiv und das (unsichtbare) Vorzeichen wird zum Rechenzeichen.
Beispiele:

$$a + (2a + 3) = a + 2a + 3$$
$$x + (-2x + 5) = x - 2x + 5$$
$$(a + b) + (a - b) = a + b + a - b$$

Beim letzten Beispiel steht vor der ersten Klammer ebenfalls ein (ungeschriebenes) Pluszeichen.
Aufgaben:

A9. Löse die Klammer auf:

a)	$a + (8 + 5a)$	b)	$x + (y + z)$
c)	$5 + (2a + 3)$	d)	$\frac{1}{2}x + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{3})$
e)	$\frac{1}{7} + (\frac{3}{7}a + \frac{5}{7})$	f)	$0.3x + (2.1x + 5.3 - 1.9x)$
g)	$3a + (2a + 3) + (6 - 5a)$	h)	$5x + (-2x + 3y) + (5x + 2y)$
i)	$(-3a + 5b - c) + (4a + 3c - 7b) + (a - b - c)$	j)	$(3x + 2y) + (5x - 2y) + (3a + b)$

Subtrahieren von Klammern

Regel:
Wenn eine Klammer subtrahiert wird, dann drehen sich alle Vor- und Rechenzeichen in der Klammer um und danach können die Klammer und das davor stehende Minuszeichen weggelassen werden.
Beispiele:

$$a - (2a + 3) = a - 2a - 3$$
$$x - (-2x + 5) = x + 2x - 5$$
$$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b$$

Aufgaben:

A10. Löse die Klammern auf:

a)	$a - (2a - 3b)$	b)	$2x - (-3x - 5y)$
c)	$2r - (3r + s) - (5s + 3r)$	d)	$5x - (-3x + 2y) - (x - 7y)$
e)	$\frac{1}{2}x - (\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y) - (-\frac{1}{4}x - \frac{7}{3}y)$	f)	$0.2a - (-3.1b - 2.4a) - (2.1a - 1.2b)$
g)	$3a - (2a - 3b + c) - 2c$	h)	$-(2u + 3v) - (-5u - 2v)$

Klammern in Klammern

Wie schon beim Rechnen mit Zahlen sollten Klammern '*von innen nach außen*' aufgelöst werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
&2a + \{3b - [2a - (3b + 2c) + (3a - 2c)]\} - \{5c - [3b - (2a - 5c) + (3b - 7a)]\} \\
&= 2a + \{3b - [2a - 3b - 2c + 3a - 2c]\} - \{5c - [3b - 2a + 5c + 3b - 7a]\} \\
&= 2a + \{3b - 2a + 3b + 2c - 3a + 2c\} - \{5c - 3b + 2a - 5c - 3b + 7a\} \\
&= 2a + 3b - 2a + 3b + 2c - 3a + 2c - 5c + 3b - 2a + 5c + 3b - 7a \\
&= -12a + 12b + 4c
\end{aligned}$$

Es ist auch möglich die Teilterme schon während der Rechnung zusammen zu fassen. Dadurch verkleinert sich die Größe der Terme. Das obige Beispiel ließe sich dann auch folgendermaßen bearbeiten:

$$
\begin{aligned}
&2a+\{3b-[2a-(3b+2c)+(3a-2c)]\}-\{5c-[3b-(2a-5c)+(3b-7a)]\}\\
&=2a+\{3b-[2a-3b-2c+3a-2c]\}-\{5c-[3b-2a+5c+3b-7a]\}\\
&=2a+\{3b-[5a-3b-4c]\}-\{5c-[6b-9a+5c]\}\\
&=2a+\{3b-5a+3b+4c\}-\{5c-6b+9a-5c\}\\
&=2a+\{6b-5a+4c\}-\{-6b+9a\}\\
&=2a+6b-5a+4c+6b-9a\\
&=-12a+12b+4c
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

A11. Löse die Klammern auf.

a)	$2x-[(3x+2y)-(4x+2y)]$	b)	$3a+[2b-(3a+5b)-2a]$
c)	$-[-(2x+3y)-(3x+2y)]$	d)	$[(3r-2s+3t)-(5t-2r+5s)]$

Multiplikation von Klammern

Multiplikation mit einem Term

Wie schon das Distributionsgesetzt angibt, wird eine Klammer mit einem Term multipliziert, indem man jeden Summanden in der Klammer mit dem Term multipliziert.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\qquad 2(2a+3b)&=2\cdot 2a+2\cdot 3b\\
&=4a+6b\\
\text{b)}\qquad x(2x-4y)&=x\cdot 2x-x\cdot 4y\\
&=2x^2-4xy\\
\text{c)}\qquad 2uvw(3u+2v-5w)&=2uvw\cdot 3u+2uvw\cdot 2v-2uvw\cdot 5w\\
&=6u^2vw+4uv^2w-10uvw^2\\
\text{d)}\qquad -3x(-2x+2y)&=6x^2-6xy
\end{aligned}
$$

Vor allem am letzten Beispiel kann man erkennen, dass die Multiplikation immer mit dem Vor- oder Rechenzeichen erfolgen muss.

Aufgaben:

A12. führe die folgenden Multiplikationen durch

a)	$2x(2x+3y)$	b)	$3a(3a-3b+2ab)$
c)	$-5(3r+2s)$	d)	$-3u(-2u+3v)$
e)	$(3a+2b-7c)\cdot(-3)$	f)	$(2x+3y-7z)xyz$
g)	$2(a+3b)-3(2a-5b)$	h)	$a(3a+b)-b(2a-4b)$
i)	$2ab(2a+3b)+3ab(3a-4b)$	j)	$3xy(6x-7y)-2xy(4x-7y)$
k)	$2(a+3b)-3(3a+2b)+5(a-b)$	l)	$x(2x-y)+y(2y+x)-x(3x+2y)$

Vermischtes

Besondere Obacht ist geboten, wenn die Multiplikation einer Klammer zusammen mit der Addition oder Subtraktion vorkommt.

A13. Löse die folgenden Klammern auf und vereinfache den Term soweit wie möglich

a)	$3(2x-7)-(5x+3)$	b)	$2[(3a-5b)+(7a-2b)]$
c)	$-[(3a-5b)-(7a-2b)]$	d)	$2x-[(3x+2y)-3(x+2y)]$
e)	$-(2x+3y)+3(6x-2y)-2(2x+6y)$	f)	$-\frac{1}{2}(-18u+4v)-\frac{1}{3}(15u-9v)$
g)	$(\frac{1}{5}x+3y)\cdot 10-20(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y)$	h)	$2a-[2(7a-8b)-(5a+3b)]$
i)	$13r(2r-s)-(5r^2-3rs)$	j)	$-[2a-3(2a+3b)+(5a-17b)]-2(-3b-7a)$

A14. Löse die Klammern auf und vereinfache den Term so weit wie möglich.

a)	$(a+b)-(2a+3b)$	b)	$-(2x-3y)+(5x+6y)$
c)	$-(a-b+c)+(2a-3b+5c)$	d)	$(r+10s-5t)-(-3r+2s-7t)$
e)	$[(2u-3v)-(4u+5v)]-(2u+3v)$	f)	$3x-[(2x+3y)-(-4x+2y)]$
g)	$-(-5a-7b)-[3a-(-4a+4b)+2b]$		
h)	$-\{[(2x+3y)-(-4x+2y)]-[3x-(-5x+3y)+2y]\}$		

A15. Löse die Klammern auf und vereinfache den Term so weit wie möglich.

a)	$2(x+2y)$	b)	$5(1-b+c)$
c)	$-4(2x+3y-2z)$	d)	$-7(2u+\frac{1}{3}v-\frac{1}{4}w)$
e)	$-3(\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}b-c)$	f)	$-12(-\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b-\frac{2}{3}c-\frac{1}{6}d)$
g)	$a(2+b)$	h)	$ab(2a+3b)$
i)	$rst(2r+3s-5t)$	j)	$-x(-2+y)$
k)	$-ab(2a-5b)$	l)	$24ab(\frac{1}{8}bc+\frac{1}{6}ac-\frac{1}{4}ab)$
m)	$2(a+3b)+5(2a-b)$	n)	$2(x+2y)-3(2x-4y)$
o)	$-3(5r-3s)-2(-10r-5s)$	p)	$a(x+y)+b(2x-3y)$
q)	$ab(2a-3b)-3ab(-4a-5b)$	r)	$xyz(3x-2y+4z)+4xyz(-2x+3y-5z)$

Klammer mal Klammer

Wird eine Klammer mit einer anderen Klammer multipliziert, dann gelten zunächst die gleichen Regeln, wie beim multiplizieren einer Klammer mit einem Term. Man braucht dazu nur die eine der beiden Klammern als einen (festen) Term anzusehen und kann dann ganz normal ausmultiplizieren.

$$(a+2b)(3x+2y)=(a+2b)3x+(a+2b)2y$$

Wendet man nun die 'Ausmultiplizierregel wieder an, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}(a+2b)(3x+2y)&=(a+2b)3x+(a+2b)2y\\&=3x\cdot a+3x\cdot 2b+2y\cdot a+2y\cdot 2b\end{aligned}$$

Damit sind alle Klammern aufgelöst.
Betrachtet man sich das Eregnis aber einmal genauer, dann stellt man eine Eigentümlichkeit fest. Dazu das Ganze noch einmal mit den vier 'anonymen' Termen T_1, T_2, T_3 und T_4, die für Term$_1$, Term$_2$, usw. stehen.

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(T_3+T_4)&=(T_1+T_2)T_3+(T_1+T_2)T_4\\&=T_1T_3+T_2T_3+T_1T_4+T_2T_4\end{aligned}$$

Man erkennt deutlich die Regel:

> Zwei Klammern werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Klammer mit jedem Summanden der anderen Klammer multipliziert.

Mit dieser Regel kann der Zwischenschritt weggelassen werden und das Ergebnis sofort angegeben werden.
Beispiel:

$$(3a+7b)(5x-3y)=3a\cdot 5x-3a\cdot 3y+7b\cdot 5x-7b\cdot 3y$$

Es empfiehlt sich folgende Vorgehensweise: Man sollte zunächst den ersten Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multiplizieren. Danach multipliziert man den zweiten Summanden der ersten Klammer wieder mit allen Summanden der zweiten Klammer, usw.
In einem etwas komplizierteren Beispiel sähe das dann folgendermaßen aus:

$$(a+2b-c)(2a-b+3c) = 2a^2 - ab + 3ac + 4ab - 2b^2 + 6bc - 2ac + bc - 3c^2$$

Jetzt müssen nur noch die Terme auf der rechten Seite zusammen gefasst werden.
Aufgaben:

A16. Löse die Klammern auf

a)	$(x+2)(x-3)$	b)	$(a-3)(a+7)$
c)	$(2a+3)(3a-7)$	d)	$(a+b)(2a-2b)$
e)	$(x+2y)(3x-y)$	f)	$(5u-2v)(3u+3v)$
g)	$(a+3b)(a-b+c)$	h)	$(a-2b+3c)(7a+2b-4c)$
i)	$(2ab-3cd)(5ab+2cd)$	j)	$(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y)$
k)	$(0.2a-1.2b)(3.1a-0.4b)$	l)	$(3x+2y-5z)(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)$

Identische Klammern

Ein ganz besonderer Fall tritt auf, wenn beide Klammern, die miteinander multipliziert werden, den gleichen Inhalt haben. Betrachtet man dies für den Fall zweier Terme T_1 und T_2, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(T_1+T_2) &= T_1^2 + T_1T_2 + T_1T_2 + T_2^2 \\ &= T_1^2 + 2\cdot T_1T_2 + T_2^2\end{aligned}$$

Da es sich **immer** so ergibt, dass 'in der Mitte' das Doppelte des Produkts der beiden Terme steht, kann der Zwischenschritt weggelassen werden. Analog ergibt sich für eine Differenz:

$$\begin{aligned}(T_1-T_2)(T_1-T_2) &= T_1^2 - T_1T_2 - T_1T_2 + T_2^2 \\ &= T_1^2 - 2\cdot T_1T_2 + T_2^2\end{aligned}$$

Und wenn man dann einmal die Summe und einmal die Differenz nimmt, dann erhält man:

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(T_1-T_2) &= T_1^2 - T_1T_2 + T_1T_2 - T_2^2 \\ &= T_1^2 - T_2^2\end{aligned}$$

Diese drei Zusammenhänge sind auch als '*Binomische Formeln*' bekannt.
Aufgaben:
Löse die Klammern auf:

A17.

a)	$(a+3)^2$	b)	$(a-3)^2$
c)	$(a+3)(a-3)$	d)	$(x+y)^2$
e)	$(x-y)^2$	f)	$(x-y)(x+y)$
g)	$(2a+3b)^2$	h)	$(3x-2y)^2$
i)	$(4r-5s)^2$	j)	$(10a+2b)(10a-2b)$

Ausklammern / Faktorisieren

Das Ausklammern ist das Gegenteil zum Multiplizieren einer Klammer mit einem Term; also quasi die Anwendung des Distributivgesetzes in umgekehrter Richtung. Dazu können bei einer Aneinanderreihung mehrerer Summanden alle **gemeinsamen** Faktoren ausgeklammert werden. Ggf. müssen dazu die Summanden erst faktorisiert werden.
Beispiel

$$\begin{aligned}12ac + 18ab &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot c + 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot b \\ &= \underline{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \underline{a}\cdot c + \underline{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \underline{a}\cdot b \\ &= 2\cdot a(2\cdot 3\cdot c + 3\cdot 3\cdot b) \\ &= 2a(6c+9b)\end{aligned}$$

Auch dann, wenn ein Faktor mehrfach vorkommt, kann er ausgeklammert werden.

$$\begin{aligned} 16xy + 12xz &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{x} \cdot y + \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{x} \cdot z \\ &= 2 \cdot 2 \cdot x(2 \cdot 2 \cdot y + 3 \cdot z) \\ &= 4x(4y + 3z) \end{aligned}$$

Besteht einer der Summanden aus allen Faktoren, die ausgeklammert werden können, dann kann er mit einem $\cdot 1$ ergänzt werden. Diese 1 bleibt dann beim Ausklammern übrig.

$$\begin{aligned} 4a + 2 &= 2 \cdot 2 \cdot a + 2 \\ &= \underline{2} \cdot 2 \cdot a + \underline{2} \cdot 1 \\ &= 2(2a + 1) \end{aligned}$$

Aufgaben

A18. Faktorisiere:

a)	$a^2 + 5a$	b)	$x^2 - 7x$	c)	$p - p^2$	d)	$rs - s^2$
e)	$3u^2 - 9u$	f)	$10t^2 + 5t$	g)	$12q^3 - 8pq^2$	h)	$25x^2y + 20y^3$
i)	$21ap + 35bp$	j)	$-16qx + 56qy$	k)	$20x^2 - 45xy$	l)	$51rs - 119s^2$

A19. Faktorisiere:

a)	$25a + 13b - 8b$	b)	$52x + 24y - 28x - 12y$	c)	$46m - 4n - 50m - 4n$
d)	$13xy + 12yz + 11xy$	e)	$70ab + 20ac - 30ab$	f)	$9pq - 12pr + 15ps$
g)	$18ab^2p - 30a^2bq$	h)	$-14bc^2s + 49b^2ct$	i)	$150a^2x^2y - 180ax^2y^2$
j)	$8m^4 + 24m^2$	k)	$27v^2 - 18v^3$	l)	$12r^6 + 18r^5$
m)	$14p^2q - 21pq^2$	n)	$15g^2h - 25gh^2$	o)	$21e^2f^3 - 28e^3f^2$
p)	$60u^4v^2 - 48u^2v^4$	q)	$25xy^3 + 55x^3y$	r)	$36c^3de^2 - 27c^2d^2e^2$

A20. Faktorisiere:

a)	$18m^2n^2 + 12mn^2 + 21m^2n$	b)	$6rs^2 - 15r^2s + 9rs$
c)	$28x^2yz + 21xy^2z - 35xyz^2$	d)	$22ab^2c - 33a^2bc + 44abc^2$
e)	$12p^3q^3 - 15p^4q^2 + 21p^2q^4$	f)	$-24u^2v^4 + 32u^3v^3 - 12u^4v^2$
g)	$15a^4b + 25a^3b^2 - 30a^2b^3$	h)	$8x^2y^2z - 12xy^2z^2 + 16x^2yz^2$
i)	$18c^3d^2 - 27c^2d^3 + 45cd^4$	j)	$15a^3bc^2 + 30ab^3c^2 - 45a^2b^3c$

Lösungen

Die Lösungen sind *on the fly* entstanden. Ich garantiere nicht dafür, dass alle angegebenen Lösungen auch wirklich richtig sind.

A1. Die Termwerte sind: 3, 5, -7, 21, 41

A2. Die Termwerte sind: 0, 2, 2, 30, 110

A3. Die Termwerte sind: 0, 1, -4, -2, 75

A4. $2x + 1$

A5. $x(x + 1)$

A6. $x^2 - 1$

A7.

a)	Subtraktionsterm	b)	Produktterm	c)	Divisionsterm
d)	Zahlterm	e)	Additionsterm	f)	Produktterm
g)	Divisionsterm	h)	Variablenterm	i)	Produktterm

A8.

a)	$3s$	b)	t	c)	$4a$
d)	$2x$	e)	$10a$	f)	$21r$
g)	$a + 5b$	h)	$3x + y$	i)	$21x + 2y$

A9.

a)	$a + 8 + 5a = 6a + 8$	b)	$x + y + z$
c)	$5 + 2a + 3 = 8 + 2a$	d)	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$
e)	$\frac{1}{7} + \frac{3}{7}a + \frac{5}{7} = \frac{6}{7} + \frac{3}{7}a$	f)	$0.3x + 2.1x + 5.3 - 1.9x = 0.5x + 5.3$
g)	$3a + 2a + 3 + 6 - 5a = 9$	h)	$5x - 2x + 3y + 5x + 2y = 8x + 5y$
i)	$-3a + 5b - c + 4a + 3c - 7b + a - b - c$ $= 2a - 3b + c$	j)	$3x + 2y + 5x - 2y + 3a + b = 8x + 3a + b$

A10.

a)	$a - 2a + 3b = -a + 3b$	b)	$2x + 3x + 5y = 5x + 5y$
c)	$2r - 3r - s - 5s - 3r = -4r - 6s$	d)	$5x + 3x - 2y - x + 7y = 7x + 5y$
e)	$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}x + \frac{7}{3}y = \frac{5}{3}y$	f)	$0.2a + 3.1b + 2.4a - 2.1a + 1.2b = 0.5a + 4.3b$
g)	$3a + 2a + 3b - c - 2c = 5a + 3b - 3c$	h)	$-2u - 3v + 5u + 2v = 3u - v$

A11.

a) $2x - [(3x + 2y) - (4x + 2y)]$
$= 2x - [3x + 2y - 4x - 2y]$
$= 2x - 3x - 2y + 4x + 2y$
$= 3x$

b) $3a + [2b - (3a + 5b) - 2a]$
$= 3a + [2b - 3a - 5b - 2a]$
$= 3a + 2b - 3a - 5b - 2a$
$= -2a - 3b$

c) $-[-(2x + 3y) - (3x + 2y)]$
$= -[-2x - 3y - 3x - 2y]$
$= 2x + 3y + 3x + 2y$
$= 5x + 5y$

d) $[(3r - 2s + 3t) - (5t - 2r + 5s)]$
$= [3r - 2s + 3t - 5t + 2r - 5s]$
$= 3r - 2s + 3t - 5t + 2r - 5s$
$= 5r - 7s - 2t$

A12.

a) $$\begin{aligned} 2x(2x+3y) &= 2x\cdot 2x + 2x\cdot 3y \\ &= 4x^2+6xy \end{aligned}$$

b) $$3a(3a-3b+2ab) = 9a^2-9ab+6a^2b$$

c) $$-5(3r+2s) = -15r-10s$$

d) $$-3u(-2u+3v) = 6u^2-9uv$$

e) $$\begin{aligned} (3a+2b-7c)\cdot(-3) &= -3(3a+2b-7c) \\ &= -9a-6b+21c \end{aligned}$$

f) $$(2x+3y-7z)xyz = 2x^2yz+3xy^2z-7xyz^2$$

g) $$\begin{aligned} 2(a+3b)-3(2a-5b) &= 2a+6b-6a+15b \\ &= -4a+21b \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} a(3a+b)-b(2a-4b) &= 3a^2+ab-2ab+4b^2 \\ &= 3a^2-ab+4b^2 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 2ab(2a+3b)+3ab(3a-4b) &= 4a^2b+2ab^2+9a^2b-12ab^2 \\ &= 12a^2b-10ab^2 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 3xy(6x-7y)-2xy(4x-7y) &= 18x^2y-21xy^2-8x^2y+14xy^2 \\ &= 10x^2y-7xy^2 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} 2(a+3b)-3(3a+2b)+5(a-b) &= 2a+6b-9a-6b+5a-5b \\ &= -2a-5b \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} x(2x-y)+y(2y+x)-x(3x+2y) &= 2x^2-xy+2y^2+xy-3x^2-2xy \\ &= -x^2-2xy+2y^2 \end{aligned}$$

A13.

a) $$\begin{aligned} 3(2x-7)-(5x+3) &= 6x-21-5x-3 \\ &= x-24 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2[(3a-5b)+(7a-2b)] &= 2[3a-5b+7a-2b] \\ &= 6a-19b+14a-4b \\ &= 20a-23b \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -[(3a-5b)-(7a-2b)] &= -[3a-5b-7a+2b] \\ &= -[-4a-3b] \\ &= 4a+3b \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x-[(3x+2y)-3(x+2y)] &= 2x-[3x+2y-3x-6y] \\ &= 2x-[-4y] \\ &= 2x+4y \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} -(2x+3y)+3(6x-2y)-2(2x+6y) &= -2x-3y+18x-6y-4x-12y \\ &= 12x-21y \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}(-18u+4v)-\tfrac{1}{3}(15u-9v) &= 9u-2v-5u+3v \\ &= 4u+v \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} (\tfrac{1}{5}x+3y)\cdot 10-20(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{5}y) &= 2x+30y-5x+4y \\ &= -3x+34y \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 2a-[2(7a-8b)-(5a+3b)] &= 2a-[14a-16b-5a-3b] \\ &= 2a-14a+16b+5a+3b \\ &= -7a+19b \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 13r(2r-s)-(5r^2-3rs) &= 26r^2-13rs-5r^2+3rs \\ &= 21r^2-10rs \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} -[2a-3(2a+3b)+(5a-17b)]-2(-3b-7a) &= -[2a-6a-9b+5a-17b]+6b+14a \\ &= -2a+6a+9b-5a+17b+6b+14a \\ &= 13a+32b \end{aligned}$$

A14.

a) $a + b - 2a - 3b = -a - 2b$

b) $-2x + 3y + 5x + 6y = 3x + 9y$

c) $-a + b - c + 2a - 3b + 5c = a - 2b + 4c$

d) $r + 10s - 5t + 3r - 2s + 7t = 4r + 8s + 2t$

e) $[2u - 3v - 4u - 5v] - 2u - 3v$

$2u - 3v - 4u - 5v - 2u - 3v$

$-4u - 11v$

f) $3x - [2x + 3y + 4x - 2y]$

$3x - 2x - 3y - 4x + 2y$

$-3x - y$

g) $5a + 7b - [3a + 4a - 4b + 2b]$

$5a + 7b - 3a - 4a + 4b - 2b$

$-2a + 11b$

h) $-\{[2x + 3y + 4x - 2y] - [3x + 5x - 3y + 2y]\}$

$-\{2x + 3y + 4x - 2y - 3x - 5x + 3y - 2y\}$

$-2x - 3y - 4x + 2y + 3x + 5x - 3y + 2y$

$2x - 2y$

A15.

a) $2x + 4y$

b) $5 - 5b + 5c$

c) $-8x - 12y + 8z$

d) $-14u - \frac{7}{3}v + \frac{7}{4}w$

e) $-\frac{1}{2}a - b + 3c$

f) $3a - 9b + 8c + 2d$

g) $2a + ab$

h) $2a^2b + 2ab^2$

i) $2r^2st + 3rs^2t - 5rst^2$

j) $2x - xy$

k) $-2a^2b + 5ab^2$

l) $3ab^2c + 4a^2bc - 6a^2b^2$

m) $2a + 6b + 10a - 5b = 12a + b$

n) $2x + 4y - 6x + 12y$

o) $-15r + 9s + 20r + 10s = 5r + 19s$

p) $ax + ay + 2bx - 3by$

q) $2a^2b - 3ab^2 + 12a^2b + 14ab^2 = 14a^2b + 11ab^2$

r) $3x^2yz - 2xy^2z + 4xyz^2 - 8x^2yz + 12xy^2z - 20xyz^2 = -5x^2yz + 10xy^2z - 28xyz^2$

A16.

a)	$x^2 - x - 6$
b)	$a^2 + 4a - 21$
c)	$6a^2 - 5a - 21$
d)	$2a^2 - 2b^2$
e)	$3x^2 + xy - 2y^2$
f)	$15u^2 + 9uv - 6v^2$
g)	$a^2 - ab + ac + 3ab - 3b^2 + 3bc = a^2 + 2ab + ac + 3bc$
h)	$7a^2 + 2ab - 4ac - 14ab - 4b^2 + 8bc + 21ac + 6bc - 12c^2 = 7a^2 - 12ab + 17ac - 4b^2 + 14bc - 12c^2$
i)	$10a^2b^2 + 4abcd - 15abcd - 6c^2d^2 = 10a^2b^2 - 11abcd - 6c^2d^2$
j)	$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{10}xy + \frac{1}{12}xy - \frac{1}{15}y^2 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{60}xy - \frac{1}{15}xy$
k)	$0.62a^2 - 0.08ab - 3.72xy + 0.48b^2 = 0.62a^2 - 3.8ab + 0.48b^2$
l)	$\frac{3}{2}x^2 + xy + xy + \frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{2}xz - \frac{5}{3}yz = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{2}xz - \frac{5}{3}yz$

A17.

a)	$a^2 + 6a + 9$	b)	$a^2 - 6a + 9$
c)	$a^2 - 9$	d)	$x^2 + 2xy + y^2$
e)	$x^2 - 2xy + y^2$		
e)	$(x - y)^2$	f)	$x^2 - y^2$
g)	$(2a)^2 + 12ab + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$	h)	$9x^2 - 12xy + 4y^2$
i)	$16r^2 - 40rs + 25s^2$	j)	$100a^2 - 4b^2$

A18.

a)	$a(a + 5)$	b)	$x(x - 7)$	c)	$p(1 - p)$	d)	$s(r - s)$
e)	$3u(u - 3)$	f)	$5t(2t + 1)$	g)	$4q^2(3q - 2p)$	h)	$5y(5x^2 + 4y^2$
i)	$7p(3a + 5b)$	j)	$8q(-2x + 7y)$	k)	$5x(4x - 9y)$	l)	$17s(3r - 7s)$

A19.

a)	$25a + 5b = 5(5a + b)$	b)	$24x + 12y = 12(2x + y)$	c)	$-4m - 8n = 4(-m - 2n)$
d)	$24xy + 12yz = 12y(2x + z)$	e)	$40ab + 20ac = 20a(2b + c)$	f)	$3p(2q - 4r + 5s)$
g)	$6ab(3bp - 5aq)$	h)	$7bc(-2cs + 7bt)$	i)	$30ax^2(5ay - 6y^2)$
j)	$8m^2(m^2 + 3)$	k)	$9v^2(3 - 2v)$	l)	$6r^5(2r + 3)$
m)	$7pq(2p - 3q)$	n)	$5gh(3g - 5h)$	o)	$7e^2f^2(3f - 4e)$
p)	$12u^2v^2(5u^2 - 4v^2)$	q)	$5xy(5y^2 + 11x^2)$	r)	$9c^2de^2(4c - 3d)$

A20.

a)	$3mn(6mn + 4n^2 + 7m^2)$	b)	$3rs(2s - 5r + 3)$
c)	$7xyz(4x + 3y - 5z)$	d)	$11abc(2b - 3a + 4c)$
e)	$3p^2q^2(4pq - 5p^2 + 7q^2)$	f)	$4u^2v^2(-6v^2 + 8uv - 2u^2)$
g)	$5a^2b(3a^2 + 5ab - 6b^2)$	h)	$4xyz(2xy - 3yz + 4xz)$
i)	$9cd^2(2c^2 - 3cd + 5d^2)$	j)	$15abc(a^2c + 2b^2c - 3ab^2)$