Vektoren

Dieser Text behandelt das Thema Vektoren, sowei es die gymnasiale Oberstufe betrifft. Vektoren "können" mehr als das, aber das würde in diesem Überblich zu weit führen.
Ein großes Defizit der meisten Mathematikbücher besteht, meiner Meinung nach, darin, dass Vektoren und die Interpretation dessen, als was sie verstanden werden können, durcheinander geworfen werden. Diese Vorgehensweise ist für viele Schüler verwirrend und hat zum Ergebnis, dass sie Vektoren und ihre Interpretation nicht mehr auseinander halten (können).
Ich halte eine strikte Trennung für übersichtlicher und leichter zu lernen und beginne daher mit dem, was Vektoren (in der Schule) **sind**.

Vektorrechnung

Zunächst einmal sind Vektoren einfach nur Objekte, mit denen in der Mathematik gerechnet wird, genau wie auch Zahlen zunächst nur Rechenobjekte sind, für die gewisse Regeln gelten sollen. Der Unterschied zwischen Zahlen und Vektoren besteht im Wesentlichen darin, dass ein Vektor aus **mehreren** Zahlen, den sogenannten Elementen, bestehen[1]. Das entscheidende ist dabei, dass diese Zahlen eine bestimmte Reihenfolge haben. So wäre es etwa etwas unterschiedliches, ob man, in dieser Reihenfolge, einen Vektor aus den Zahlen '1', '2' und '3' oder aus den Zahlen '2', '1' und '3' zusammen setzt.

Schreibweise

Um auszudrücken, dass man von einem Vektor spricht und nicht einfach einer beliebigen Reihe von Zahlen hat sich eingebürgert, die Zahlen eines Vektors insgesamt einzuklammern. Einen Vektor, der aus den Zahlen '1', '2' und '3' besteht würe man daher folgendermaßen schreiben:

$$(1; 2; 3) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die linke Schreibweise wird manchmal auch als '*Zeilenvektor*', die rechte als '*Spaltenvektor*' bezeichnet. Üblich ist allerdings die rechte Schreibweise, wobei der oberste Eintrag des Spaltenvektors dem ersten im Zeilenvektor entspricht; die beiden obigen Vektoren sind daher identisch und unterscheiden sich nur durch die Schreibweise.
Für die Schreibweise von Vektorvariablen hat sich durchgesetzt diese wie Zahlvariablen durch einen Kleinbuchstaben zu schreien, allerdings wird ein Pfeil über die Variable geschrieben. Somit bezeichnet

$$a \qquad \vec{a}$$

das linke 'a' eine Zahlvariable und das rechte eine Vektorvariable. Diese Unterscheidung bei den Variablen ist nötig, da es auch Rechnungen gibt, bei denen Vektoren gemischt mit Zahlen vorkommen.

Dimension

Die Anzahl der Zahlen, die in einem Vektor stehen, bezeichnet man als **Dimension des Vektors**. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist daher ein 2-dimensionaler Vektor, während

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[1] Streng genommen müssen Vektoren nicht unbedingt Zahlen enthalten, es können etwa auch mehrere Funktionen sein, aber das würde aus der schulischen Mathematik heraus führen.

ein 3-dimensionaler Vektor ist.
Die Anzahl der Dimensionen ist dabei prinzipiell beliebig und nicht an die drei Raumdimensionen unserer Wahrnehmung gebunden. Somit ist es mathematisch durchaus sinnvoll auch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu schreiben. Es handelt sich schlicht um einen 5-dimensionalen Vektor.
Mit dem Begriff der Dimension verbindet sich allerdings schon die erste **Regel** für die Vektorrechnung:

> Es können **immer** nur Vektoren mit gleicher Dimension miteinander verrechnet werden!

Es ist also nicht möglich etwa einen 2-dimensionalen Vektor und einen 3-dimensionalen zu addieren[2]. Im weiteren wird, wie in der Schule üblich nur noch mit 2- und 3-dimensionalen Vektoren gearbeitet werden.

Rechenregeln für Vektoren

Gleichheit

Die erste 'Rechenoperation' ist so einfach, dass sie in der Regel gerne vergessen wird: Die Gleichheit. Dabei ist die Definition, wann zwei Vektoren gleich sind, ausgesprochen einfach:

> Zwei Vektoren sind dann gleich, wenn paarweise ihre Elemente gleich sind.
> Sind also die zwei Vektoren:
>
> $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$
>
> gegeben, dann sind sie nur dann gleich, wenn gilt:
>
> $$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Bei der Frage nach der Gleichheit oder Ungleichheit spielt insbesondere die Reihenfolge der Elemente der Vektoren eine Rolle. So sind etwa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nicht gleich, weil zwar die Elemente paarweise gleich sind, aber ihre Positionen nicht!

Addition

Ähnlich einfach sind auch die beiden ersten 'echte' Rechenregeln für Vektoren, zunächst einmal die Addition:

[2] Was unter der Addition zweier Vektoren verstanden werden soll, kommt gleich.

Zwei Vektoren werden addiert, indem ihre Elemente paarweise addiert werden, also:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

In der Praxis ist das außerordentlich einfach, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A1. Berechne die folgenden Additionen und Subtraktionen[3]

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit einem Skalar

In vollkommener Analogie zu den Zahlen, kann auch die Multiplikation verstanden werden, es gibt allerdings einen erheblichen Unterschied bei der Multiplikation von Vektoren: Es gibt **drei** verschiedene Multiplikationen mit Vektoren[4]. Die Multiplikation, die in genauer Analogie zu den Zahlen erfolgt heißt: **Multiplikation mit einem Skalar**[5].

Ein Vektor wird mit einem Skalar (einer Zahl) multipliziert, indem jedes Element des Vektors mit dem Skalar multipliziert wird, also:

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ \dots \\ c \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Wie bei den Zahlen kann man also in diesem Fall die Multiplikation als eine vereinfachende Schreibweise für eine mehrfache Addition geschreiben. So gilt etwa:

$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$$

Auch diese Rechenoperation ist in der Anwendung sehr einfach.

[3] Die Subtraktion erfolgt sinngemäß wie die Addition durch paarweise Subtraktion der Elemente.

[4] Wem jetzt schlecht geworden sein sollte: Zum Ausgleich gibt es bei Vektoren keine Division!

[5] Unter einem 'Skalar' versteht man im Zusammenhang mit Vektoren einfach nur eine Zahl. Die Bezeichnung Skalar statt Zahl dient dazu Zahlen, die als einfache Zahlen mit Vektoren verrechnet werden von denen zu unterscheiden, die in einem Vektor stehen. Die Zahlen in einem Vektor heißen demnach Zahlen oder, wie schon erwähnt, Elemente. Die Zahlen, die mit einem Vektor zusammen in einer Rechnung auftreten heißen Skalar.

A2. Berechne die folgenden Multiplikationen von Vektoren mit einem Skalar

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{b)} & (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{c)} & \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \\ \text{d)} & 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{e)} & (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} & \text{f)} & \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ -21 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit

Die ersten Rechenregeln sind sehr ähnlich zu denen der Zahlen. Das wird nun anders, denn bei Vektoren gibt es eine Eigenschaft, die es bei Zahlen nicht geben kann und nicht gibt, die der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit.

Oftmals wird diese Eigenschaft nicht richtig verstanden, sie ist aber für viele Interpretationen von Vektoren unerlässlich und erleichtert die Arbeit mit Vektoren ungemein. Aus diesem Grunde soll der Begriff der linearen Abhängigkeit etwas ausführlicher behandelt werden.

Am einfachsten dürfte es ein, wenn man sich die lineare Abhängigkeit als '*den kleinen Bruder der Gleichheit*' vorstellt. So können zwei (oder drei oder vier) Vektoren linear abhängig sein, aber dabei sind die nicht gleich. Was bedeutet nun lineare Abhängigkeit genau:

Eine Gruppe von Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, ... $\vec{a_n}$ wird dann linear Abhängig genannt, wenn es für sie Zahlen b_1, b_2, ..., b_n gibt, so dass die Gleichung:

$$b_1 \cdot \vec{a_1} + b_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + b_n \cdot \vec{a_n} = \vec{0}$$

eine Lösung hat, bei der nicht alle $b = 0$ sind.

Kompliziert? Ja, ist es! Aber es wird erklärt werden. Zunächst muss aber noch etwas anderes erklärt werden, das Symbol $\vec{0}$.

Das Symbol $\vec{0}$ bezeichnet den sogenannten **Nullvektor**. Er entspricht in seiner Bedeutung der Zahl 0 bei den Zahlen. Der Nullvektor ist definiert dadurch, dass alle seine Elemente Null sind, also

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies gilt unabhängig von der Dimension des Vektors. Bei 2-dimensionalen Vektoren enthält der Nullvektor eben zwei Nullen, bei 3-dimensionalen Vektoren drei, usw.

Aber zurück zur linearen Abhängigkeit. Die obige Formel ist wirklich sehr unübersichtlich und vor allem nicht leicht zu verstehen. Man kann sie aber umformen und dann wird sie etwas leichter verständlich[6]:

$$\begin{aligned} b_1\vec{a_1} + b_2\vec{a_2} + \ldots + b_n\vec{a_n} &= \vec{0} \\ b_1\vec{a_1} + b_2\vec{a_2} + \ldots + b_{n-1}\vec{a_{n-1}} &= -b_n\vec{a_n} \\ -\frac{b_1}{b_n}\vec{a_1} - \frac{b_2}{b_n} - \ldots - \frac{b_{n-1}}{b_n}\vec{a_{n-1}} &= \vec{a_n} \\ c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + \ldots + c_{n-1}\vec{a_{n-1}} &= \vec{a_n} \end{aligned}$$

[6] Wie auch bei Zahlen üblich lässt man das Multiplikationszeichen in der Regel weg, wenn es nicht zu Verwechselungen kommen kann.

Beim Übergang zur letzten Zeile wurden die Brüche nur durch andere Variablen(namen) ersetzt.
Auch hier scheint die letzte Zeile ziemlich unübersichtlich, aber bei genauerem Hinsehen sieht man, dass die Interpretation nun ziemlich einfach ist: Die Vektoren sind dann linear abhängig, wenn man einen (beliebigen) von ihnen aus den anderen 'erzeugen' kann, wobei 'erzeugen' bedeutet, dass man ihn durch Multiplikation mit Zahlen und Addition als Ergebnis erhält.
Das ist sicherlich immer noch ziemlich verwirrend, aber wenn man sich ein Beispiel ansieht, sollte es klar werden:
Beispiel Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, denn es gilt folgender Zusammenhang zwischen ihnen:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man könnte umgangssprachlich sagen, dass man den dritten Vektor, also den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ gar nicht '*braucht*', weil man ihn aus den anderen beiden zusammen stellen kann. Er bietet, ebenfalls wieder umgangssprachlich, keine neue Information.
Diese Sichtweise kann hilfreich sein[7], hat aber einen kleinen Nachteil. Es ist im obigen Beispiel nicht ganz richtig, dass man den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ nicht 'braucht', denn das kann natürlich auch für einen der beiden anderen Vektoren gelten, so ist etwa auch:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bei dieser Sichtweise wäre dann $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 'überflüssig'.
Die lineare Abhängigkeit ist natürlich nicht immer gegeben. Betrachtet man etwa die drei Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dann sieht man sofort, dass die Gleichung

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gar keine Lösung haben kann. Egal welche Werte man für a und b einsetzt wird immer ein Vektor herauskommen, bei dem das dritte Element 0 ist und niemals 1.
Will man nun überprüfen, ob eine Gruppe von Vektoren linear abhängig oder unabhängig ist, dann bietet sich allerdings die erste Darstellung eher an, weil sich dann ein einfaches Gleichungssystem ergibt, bei dem

[7] Gerade hinsichtlich der einen oder anderen Interpretation von Vektoren ist sie sehr sinnvoll. Bei dem gerade vorgestellten Beispiel etwa kann man die lineare Abhängigkeit so interpretieren, dass die drei Vektoren, die zwar im 3-dimensionalen Raum liegen, alle drei innerhalb einer Ebene liegen, also eine der Dimensionen gar nicht 'brauchen'.

die Lösung sofort eine Aussage über die lineare (Un)Abhängigkeit erlaubt. Auch dass kann am einfachsten mit einem Beispiel erläutert werden.
Beispiel Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig oder unabhängig? Dazu bringt man sie in die Form, wie sie zu Beginn vorgestellt wurde, also:

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann diese Gleichung auch in Form von drei Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} 2a + 0b - 2c &= 0 \\ 2a + 3b + 4c &= 0 \\ 1a + 2b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

Versucht man dieses Gleichungssystem zu lösen, dann ergibt sich, dass es unendlich viele Lösungen hat, etwa:

$$\begin{aligned} 2a + 0b - 2c &= 0 \\ 2a + 3b + 4c &= 0 \\ 1a + 2b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= c \\ 2a + 3b + 4a &= 0 \\ a + 2b + 3a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= c \\ b &= -2a \\ b &= -2a \end{aligned}$$

Man kann erkennen, dass es unendlich viele Lösungen gibt, wenn nur sicher gestellt ist, dass $a = c$ ist und $b = -2a$. Somit sind etwa die folgenden Lösungen denkbar: $a = 1, b = -2, c = 1$, $a = 10, b = -20m, c = 10$ oder $a = -3, b = 6, c = -3$. Bei jeder dieser Kombinationen geht die Gleichung auf $\Rightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig.
Anders sieht es aus bei den Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Geht man bei diesen Vektoren analog vor, dann ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1a + 2b + 3c &= 0 \\ 2a + 2b + 4c &= 0 \\ 1a + 2b + 4c &= 0 \end{aligned}$$

Zieht man von der ersten, die dritte Gleichung ab, dann ergibt sich sofort: $c = 0$. Rechnet man dann weiter, dann erhält man schnell, dass auch $a = 0$ und $b = 0$ sein müssen[8]. Das Gleichungssystem hat also nur die Lösung $a = 0, b = 0$ und $c = 0$, die natürlich immer gegeben ist. Da es keine weitere Lösung gibt, müssen die Vektoren linear unabhängig sein.

[8] Wenn man mit Vektoren arbeitet, sollte man gut mit linearen Gleichungssystemen umgehen können, also auch wissen, wann ein Gleichungssystem unlösbar ust und wann es unendlich viele Lösungen hat.

A3. Bestimme, ob die jeweils folgenden Vektorengruppen linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\12\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}18\\-21\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\9\\-4\end{pmatrix}$

Skalarprodukt

Wie oben schon gesagt, gibt es bei Vektoren **drei** Multiplikationsarten. Die zweite, neben der schon vorgestellten heißt: **Skalarprodukt**. Der Grund dafür liegt darin, dass bei diesem Produkt zwar zwei Vektoren miteinander multipliziert werden, und nicht wie oben eine Zahl mit einem Vektor, das Ergebnis aber eine Zahl ist. Die Definition ist ziemlich einfach:

> Man berechnet das Skalarprodukt zweier Vektoren, indem man paarweise die entsprechenden Elemente multipliziert und die Ergebnisse addiert, also
>
> $$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

Mit ein bisschen Übung kann man in der Regel ein Skalarprodukt sehr einfach berechnen, so ist:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 2 + 6 + 3 = 11$$

Weil man die entsprechenden Elemente, die ja in der Regel nebeneinander stehen, der Reihe nach miteinander multiplizieren muss, lässt sich die Sache oft sogar schnell im Kopf rechnen.
Interpretiert man Vektoren geometrisch[9], dann hat das Skalarprodukt einige sehr interessante Eigenschaften, die man seiner leichten Berechenbarkeit gar nicht ansieht. Hier soll nur eine dieser Eigenschaften vorgestellt werden:
Multipliziert man einen Vektor mit sich selber, dann ergibt sich eine Zahl. Die Wurzel dieser Zahl entspricht der Länge des geometrisch interpretierten Vektors. Weil bis hier die geometrische Interpretation noch nicht vorgestellt wurde[10], ist diese Aussage natürlich nicht sonderlich hilfreich, sie soll nur dazu dienen die Bedeutung des Skalarproduktes herauszustellen.

A4. Berechne das Skalarprodukt der folgenden Vektorpaare

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\10\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$

Für die beiden bisher behandelten Multiplikationsformen wird kein unterschiedliches Symbol verwendet. Es wird der Multiplikationspunkt '(·)' verwendet oder einfach gar nichts zwischen die Vektoren geschrieben.

[9] Das ist in der Schule fast ausschließlich der Fall

[10] und auch nicht vorgestellt werden soll.

Das geht deshalb, weil immer klar ist, um welche von den beiden Multiplikationen es sich handelt. Wird eine Zahl mit einem Vektor multipliziert, dann handelt es sich um die erste Multiplikationsart, werden zwei Vektoren miteinander mutlipliziert, dann muss es das Skalarprodukt sein. Weil darüber hinaus weiterhin, wie bei Zahlen, die Regel gilt, dass von '*links nach rechts*' gerechnet wird, ist auch folgendes richtig:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=11\cdot\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55\\66\end{pmatrix}$$

Auch wenn es zugegebenermaßen ein bisschen seltsam aussieht, was daran liegt, dass hier zwei verschiedene Multiplikationen beteiligt sind, was man der Aufgabenstellung nicht unbedingt so einfach ansieht.

Kreuzprodukt

Die dritte Multiplikationsart ist das sogenannte Kreuzprodukt. Es ist in dem Sinne die einzige 'echte' Multiplikation, weil dabei zwei Vektoren multipliziert werden und auch ein Vektor das Ergebnis ist. Weil es sich von den anderen Multiplikationsarten unterscheidet, wird hier auch ein anderes Multiplikationszeichen verwendet, das: '$\times$'.

Das Kreuzprodukt ist in der schulischen Mathematik eigentlich nicht erforderlich. Es gibt allerdings eine Anwengung in der Geometrie, für das es ganz nützlich ist. Die Definition sieht ein bisschen krude aus:

Für zwei dreidimensionale Vektoren ist das Kreuzprodukt definiert als:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Es gibt einige Gedankenstützen, welche die Berechnung des Kreuzproduktes vereinfachen oder es besser merkbar machen. Da hier sicherlich jeder seine eigene Vorstellung hat, gehe ich darauf nicht näher ein.

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2-3\cdot 3\\3\cdot(-1)-1\cdot 2\\1\cdot 3-2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Lösungen

Achtung! Im Folgenden stehen die Lösungen der Aufgaben im Text. Ich habe mich bemüht, die Lösungen nach bestem Wissen und Gewissen '*richtig*' zu machen. Aber auch ich bin nicht vor Fehlern gefeit. Sollte jemand einen Fehler in den Lösungen finden, oder der Meinung sein einen Fehler gefunden zu haben: Mail an cremer@fritz.rmi.de

A1.

a)	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	b)	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$	c)	Nicht lösbar unterschiedl. Dimensionen
d)	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$	e)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	f)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

A2.

a)	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	b)	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	c)	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
d)	$\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$	e)	$\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$	f)	$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

A3.

a) linear abhängig
b) linear abhängig
c) linear unabhängig
d) linear abhängig

A4.

a)	0	b)	0	c)	42
d)	-5	e)	60	f)	1